MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

31. BAND. 2. UND 3. HEFT

FESTSCHRIFT FÜR OTTO HÖLDER

(ABGESCHLOSSEN AM 22. DEZEMBER 1929)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1929

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

31. Band. **Inhalt:** 2. u. 3. Heft.

Seite

Bieberbach, L., Über die reellen Züge der algebraischen Gebilde 161
Engel, Fr., Zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen 176
Hausdorff, F., Die Äquivalenz der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte negativer Ordnung 186
Hölder, E., Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik 197
Kähler, E., Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen. I. 258
Kneser, A., Eine Anwendung der eindimensionalen Greenschen Funktion . . . 270
Knopp, K., Zur Theorie der Limitierungsverfahren. (Zweite Mitteilung) 276
Kowalewski, G., Rollkurven im Raume 306
Landau, E., Über die neue Winogradoffsche Behandlung des Waringschen Problems 319
Levi, Fr., Die Drittelungskurve 339
Lichtenstein, L., Zum Sturm-Liouvilleschen Problem 346
Müntz, Ch. H., Über die Potenzsummation einer Entwicklung nach Hermiteschen Polynomen 350
Neder, L., Abschätzungen für die Ableitungen einer reellen Funktion eines reellen Arguments 356
Nikliborc, W., Ein Satz über die Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten 366
Schnee, W., Die Funktionalgleichung der Zetafunktion und der Dirichletschen Reihen mit periodischen Koeffizienten 378
Schur, I., Zur Theorie der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte 391
Steinhaus, H., Über die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist 408
Study, E., Die Zeichensprache der elliptischen Funktionen 417
Weinstein, A., Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen 424
Wintner, A., Über die kleinen numerischen Divisoren in der Theorie der allgemeinen Störungen 434

FESTSCHRIFT

OTTO HÖLDER

ZU SEINEM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE

AM 22. DEZEMBER 1929

GEWIDMET

VERZEICHNIS DER MITARBEITER

LUDWIG BIEBERBACH IN BERLIN
FRIEDRICH ENGEL IN GIESSEN
F. HAUSDORFF IN BONN
ERNST HÖLDER IN LEIPZIG
ERICH KÄHLER IN HAMBURG
ADOLF KNESER IN BRESLAU
KONRAD KNOPP IN TÜBINGEN
GERHARD KOWALEWSKI IN DRESDEN
EDMUND LANDAU IN GÖTTINGEN
FRIEDRICH LEVI IN LEIPZIG
LEON LICHTENSTEIN IN LEIPZIG
CH. H. MÜNTZ IN LENINGRAD
LUDWIG NEDER IN MÜNSTER (WESTF.)
WŁADYSŁAW NIKLIBORC IN LWÓW (POLEN)
WALTER SCHNEE IN LEIPZIG
I. SCHUR IN BERLIN
HUGO STEINHAUS IN LWÓW (POLEN)
E. STUDY IN BONN
A. WEINSTEIN IN BRESLAU
AUREL WINTNER IN LEIPZIG, Z. Z. IN ROM

Über die reellen Züge der algebraischen Gebilde.

Von

Ludwig Bieberbach in Berlin.

Bekanntlich hat A. Harnack 1876 (Math. Annalen Bd. 10) zu beweisen versucht, daß eine jede ebene algebraische Kurve aus endlich vielen reellen Zügen[1]) besteht — und daß die Zahl dieser Züge höchstens um eins größer ist als das Geschlecht. Analoge Sätze für Raumkurven oder Flächen sind meines Wissens — von einer gelegentlichen die Kurven betreffenden Bemerkung Kleins abgesehen — in der Literatur nicht vertreten. Hier soll ein solcher Endlichkeitssatz für ein jedes algebraische Gebilde bewiesen werden[2]).

Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge von Polynomen mit reellen Koeffizienten. Algebraisches Gebilde nennen wir die Menge der reellen $(x_1 \dots x_n)$, die allen Gleichungen $F(x_1 \dots x_n) = 0$ genügen. $F(x_1 \dots x_n)$ sei dabei ein Polynom der Menge $\mathfrak{M}$. Wir wollen zeigen, daß dieses Gebilde Vereinigungsmenge von endlich vielen maximalen zusammenhängenden Teilmengen ist. Die Anzahl derselben ist im Falle eines endlichen $\mathfrak{M}$ durch den Maximalgrad der F und die Kardinalzahl von $\mathfrak{M}$ limitiert. Dabei nennen wir eine zusammenhängende Teilmenge des Gebildes maximal, wenn sie keine echte Teilmenge einer zusammenhängenden Teilmenge des Gebildes ist. Ich lege dabei der Allgemeinheit wegen den kartesischen Raum zugrunde, wo die $(x_1 \dots x_n)$ den Punkten umkehrbar eindeutig zugeordnet sind. Die entsprechende Aussage für den projektiven Raum folgt daraus.

Betrachten wir zunächst den Fall $n = 1$. Hier ist die eben ausgesprochene Behauptung eine unmittelbare Folge des Satzes, daß die Zahl

---

[1]) Zug ist dabei für Harnack ein maximaler in der Kurve enthaltener Jordanbogen, der aus mehr als einem Punkt besteht. Für uns wird weiterhin ein Zug eine maximale zusammenhängende Teilmenge des Gebildes sein.

[2]) Veranlassung zu dieser Beweisführung war mir eine Untersuchung über offene Euklidische Raumformen, bei der ich von dem erwähnten Satz einen ausschlaggebenden Gebrauch mache.

der Nullstellen den Grad einer algebraischen Gleichung nicht übertreffen kann. Es kann sich ja dann nur um einen Teil der endlich vielen Nullstellen eines der Polynome handeln.

Den allgemeinen Fall eines beliebigen n beabsichtigen wir durch vollständige Induktion zu beweisen. Wir müssen aber, um dies Verfahren zugkräftig zu machen, den Beweis eines allgemeineren Satzes anstreben. Wir wollen nämlich auch noch beweisen, daß die Komplementärmenge eines algebraischen Gebildes im Raum $(x_1 \dots x_n)$ aus endlich vielen maximalen zusammenhängenden Teilmengen besteht. Im Falle eines endlichen $\mathfrak{M}$ ist auch diese Anzahl durch den Maximalgrad der F und die Kardinalzahl von $\mathfrak{M}$ limitiert. Auch diese zweite Behauptung ist im Falle $n = 1$ offenbar trivial, da endlich viele Punkte endlich viele Intervalle bestimmen.

Auch dies ist noch nicht genug für den Ansatz der vollständigen Induktion. Wir beweisen drittens: Der Durchschnitt zweier algebraischer Gebilde bestimmt auf jedem derselben eine Komplementärmenge, die aus endlich vielen maximalen zusammenhängenden Teilmengen besteht. Auch diese dritte Behauptung ist für $n = 1$ trivial, da doch jedes Gebilde aus endlich vielen Punkten besteht. Wieder ist diese Anzahl im Falle eines endlichen $\mathfrak{M}$ durch den Maximalgrad der F und die Kardinalzahl von $\mathfrak{M}$ limitiert.

§ 1.

Wir nehmen nunmehr an, unsere drei Sätze seien für weniger als n Veränderliche bewiesen.

Aus der gegebenen Menge von Polynomen greifen wir eines, F_1, heraus und zerlegen es im Körper der reellen Zahlen in irreduzible Faktoren F_{1k}:

$$F_1 = F_{11} \cdots F_{1\nu}.$$

Ihre Anzahl ist höchstens gleich dem Grade von F_1. Das algebraische Gebilde ist dann Vereinigungsmenge von endlich vielen Gebilden, die aus dem gegebenen hervorgehen, indem man F_1 durch eines der F_{1k} ersetzt. Ein jedes dieser Gebilde untersuchen wir nun zunächst nach einheitlicher Methode für sich allein. Es werde z. B. F_{11} genommen. Im Körper der komplexen Zahlen ist F_{11} entweder irreduzibel oder es zerfällt in zwei konjugiert imaginäre irreduzible Faktoren. Eine der Variablen, welche in F_{11} zu positivem Grade vorkommt, bezeichnen wir für den Augenblick mit x_1, in der Absicht, $F_{11} = 0$ dadurch zu befriedigen, daß wir x_1 nach Potenzen der übrigen Variablen in der Umgebung geeigneter Stellen entwickeln. Es gibt jedenfalls (komplexe) Stellen, wo die Gleichung $F_{11} = 0$, als Gleichung für x_1 aufgefaßt, so viele, endliche, verschiedene Wurzeln besitzt, als ihr Grad hinsichtlich x_1 angibt. Denn dies ist nur da nicht der Fall, wo die Diskri-

minante hinsichtlich x_1 oder wo der Koeffizient der höchsten vorkommenden Potenz von x_1 verschwindet. Die Diskriminante aber z. B. kann nicht für alle $x_2 \dots x_n$-Werte verschwinden, weil das Polynom F_{11} dann bei seiner Zerlegung im Körper der komplexen Zahlen mehrfache Teiler besitzen müßte. Es wäre aber dann im Körper der reellen Zahlen reduzibel. Verschwände der Koeffizient der höchsten Potenz von x_1 für alle $x_2 \dots x_n$, so wäre der Grad falsch definiert. Daher enthält jeder Bereich der $x_2 \dots x_n$ Teilbereiche, in denen weder die Diskriminante noch der Koeffizient der höchsten Potenz eine Nullstelle besitzen. In der Umgebung einer Stelle, wo die Gleichung $F_{11} = 0$ so viele verschiedene Wurzeln hat als ihr Grad angibt, kann man $F_{11} = 0$ durch eben so viele Potenzreihen befriedigen[3]). Jede andere Stelle von $F_{11} = 0$ ist Häufungsstelle von Wertsystemen $(x_1 \dots x_n)$, die durch solche Potenzreihen erfaßt werden können. Weiter bilden die Stellen $(x_2 \dots x_n)$, zu welchen so viele verschiedene Nullstellen gehören als der Grad angibt, eine im komplexen Gebiet zusammenhängende Menge. Sind nämlich $\mathfrak{a} = (a_2 \dots a_n)$ und $\mathfrak{b} = (b_2 \dots b_n)$ zwei solche Stellen, so betrachte man die Stellen $t\mathfrak{a} + (1-t)\mathfrak{b}$ für beliebige komplexe t. Trägt man dies in F_{11} ein, so genügen der entstehenden Gleichung $F(x_1, t)$ eine oder mehrere algebraische Funktionen $x_1(t)$, die bei $t = 0$ und bei $t = 1$ lauter verschiedene Werte besitzen und zwar so viele, als der Grad von F als Funktion von x_1 angibt. Man kann aber bekanntlich $t = 0$ und $t = 1$ durch einen Weg verbinden, auf dem alle Wurzeln $x_1(t)$ verschieden und endlich bleiben. Demnach genügt es, in der Umgebung einer Stelle, wo alle Wurzeln x_1 endlich und verschieden sind, $F_{11} = 0$ durch Potenzreihen aufzulösen. Dann gewinnt man alle anderen dieser Gleichung genügenden Potenzreihen durch analytische Fortsetzung, und jedes der Gleichung genügende Wertsystem, das so nicht durch Potenzreihen erfaßt wird, kommt als Häufungsstelle solcher Stellen heraus.

Ist dann F_2 ein weiteres unserer Polynome, das x_1 enthält, so tragen wir darin die gefundenen Potenzreihen ein und multiplizieren die so erhaltenen Funktionen miteinander. Das wird nach dem Hauptsatz über symmetrische Funktionen eine rationale Funktion von $x_2 \dots x_n$ mit reellen Koeffizienten, die man durch Multiplikation mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz von x_1 in F_{11} in geeigneter, von $x_2 \dots x_n$ unabhängiger, Potenz ganz machen kann, derart, daß sie nicht durch diesen Koeffizienten teilbar wird. Für die $(x_2 \dots x_n)$ einer jeden Stelle des Gebildes muß das so erhaltene Polynom verschwinden. Für diejenigen, in deren Umgebung man entwickeln kann, ist dies ohne weiteres klar. Die übrigen sind aber Häufungs-

[3]) Falls außer x_1 in F_{11} keine Variablen vorkommen, so reduzieren sich diese Potenzreihen auf ihre Absolutglieder.

stellen derselben. Verfahren wir so mit allen Polynomen, welche x_1 enthalten, so entsteht aus der gegebenen Polynommenge eine neue, in der nur F_{11} das x_1 enthält. Die übrigen sind von x_1 frei. Die Grade der neu entstandenen Polynome sind durch den Grad von F_{11} und den Grad eines jeden alten Polynoms, aus dem das betreffende neue entstanden ist, limitiert. Das Verschwinden der Polynome der neuen Folge ist notwendig für das Verschwinden der Polynome der alten Folge. Kommen darunter von Null verschiedene Konstante vor, so ist das betreffende Gebilde leer.

Unter den von x_1 freien Polynomen der neuen Folge greifen wir anderenfalls eines heraus. Wir zerlegen es im Körper der reellen Zahlen in irreduzible Faktoren und stellen diesen Faktoren entsprechend wieder endlich viele neue Gebilde auf, deren Vereinigungsmenge das vorher zu betrachtende ist. Diese neuen Gebilde betrachten wir nach einheitlicher Methode weiter. In einem der irreduziblen Faktoren greifen wir eine Variable heraus, bezeichnen sie einstweilen mit x_2 und stellen x_2 durch Potenzreihen in den übrigen Variablen $x_3 \dots x_n$ dar, tragen diese Potenzreihen in alle anderen Polynome ein, multiplizieren die Ergebnisse, die sich aus einem derselben ergeben, miteinander und mit einer geeigneten möglichst niedrigen Potenz des höchsten Gliedes. So entstehen neue Polynome, deren Verschwinden für die Stellen des Gebildes notwendig ist. Kommt darunter eine von Null verschiedene Konstante vor, so ist das betreffende Gebilde leer. Anderenfalls greifen wir aus den von x_1 und x_2 freien Polynomen eines heraus, zerlegen es im Körper der reellen Zahlen in irreduzible Faktoren, bezeichnen eine darin vorkommende Variable einstweilen mit x_3 und fahren in der beschriebenen Weise weiter.

Nach endlich vielen Schritten, deren Anzahl unter einer allein von den Gradzahlen der benutzten Polynome abhängigen Schranke liegt, erhalten wir so eine endliche Anzahl von algebraischen Gebilden folgender Art:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\Phi_1(x_1, x_{\nu+1} \dots x_n) = 0, \\ &\Phi_2(x_2, x_{\nu+1} \dots x_n) = 0, \\ &\vdots \\ &\Phi_\nu(x_\nu, x_{\nu+1} \dots x_n) = 0, \end{aligned}$$

wo kein Φ_i identisch verschwindet und wo die Variablen $x_1 \dots x_\nu$ wirklich vorkommen. Es kann sein, daß die vorher einstweilen mit x_1 bezeichnete Variable während des Verfahrens herausfällt. In (1) sind die schließlich nur in je einem der Φ wirklich vorkommenden Variablen mit $x_1 \dots x_\nu$ bezeichnet. Die $x_{\nu+1} \dots x_n$ brauchen nicht alle vorzukommen. Es sind also durch (1) stets einige der Variablen als algebraische Funktionen der übrigen dargestellt. Diejenigen aber, welche so als Funktionen der übrigen erscheinen, können von Gebilde zu Gebilde wechseln. Sie sind

hier nur im Interesse einer einfachen Schreibweise mit $x_1 \dots x_\nu$ bezeichnet. Die Grade der Φ sind durch die Grade der benutzten F limitiert. Das zu untersuchende algebraische Gebilde der $F_i = 0$ ist jedenfalls in der Vereinigungsmenge dieser endlich vielen Gebilde enthalten. Es ist aber noch nicht sicher, daß es mit der Vereinigungsmenge dieser Gebilde identisch ist. Um auch dessen sicher zu werden, schlagen wir nun folgenden Weg ein. Wir greifen ein einzelnes dieser Gebilde heraus. Es sei z. B. das Gebilde (1). Wir zerlegen die darin vorkommenden Φ in ihre im Körper der reellen Zahlen irreduziblen Faktoren und gewinnen so neue Gebilde, indem wir jedes der Φ durch einen seiner irreduziblen Faktoren ersetzen. Die Zahl dieser Gebilde liegt unterhalb einer nur von den Gradzahlen der Φ abhängigen Schranke. Einige der neuen Gebilde haben schon die Gestalt (1). Andere wieder werden davon abweichen können. Bei geeigneter Numerierung der Variablen sehen diese dann aber so aus:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1(x_1, x_{\mu+1} \dots x_n) = 0,\\
&\vdots\\
&\Psi_\mu(x_\mu, x_{\nu+1} \dots x_n) = 0,\\
&\Psi_{\mu+1}(x_{\nu+1} \dots x_n) = 0,\\
&\vdots\\
&\Psi_\nu(x_{\nu+1} \dots x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Solche Gebilde behandeln wir nach einem, dem bisher benutzten ähnlichen Verfahren, indem wir eine der Variablen, die in den $\Psi_{\mu+1} \dots \Psi_\nu$ zu positiver Potenz vorkommt, einstweilen mit $x_{\mu+1}$ bezeichnen. Sie komme in $\Psi_{\mu+1}$ vor. Wir verwenden wieder das Potenzreihenverfahren und beseitigen sie aus allen anderen Ψ. Fortsetzung dieses Verfahrens führt wieder zu Gebilden (1), bei denen aber nun die Zahl der unabhängigen Variablen $x_{\nu+1} \dots x_n$ um mindestens Eins kleiner geworden ist. Diesen Prozeß kann man nun fortsetzen, bis man lauter Gebilde von der Art (1) erhalten hat, in denen die Φ alle im Körper der reellen Zahlen irreduzibel sind. Wieder ist das anfangs gegebene Gebilde in der Vereinigungsmenge dieser Gebilde enthalten. Aber immer sind wir noch nicht sicher, daß es mit derselben identisch ist Um dessen endlich gewiß zu werden, verwenden wir noch folgendes letzte Verfahren. Wir greifen ein einzelnes der Gebilde (1) heraus, suchen eine Stelle $(x_{\nu+1} \dots x_n)$, an der alle Φ so viele voneinander verschiedene endliche Wurzeln $x_1 \dots x_\nu$ haben, als ihre Grade in $x_1 \dots x_\nu$ angeben, und tragen diese Potenzreihen in die $F(x_1 \dots x_n)$ des ursprünglich gegebenen Gebildes ein. Falls eines dieser F nun nicht identisch in den $x_{\nu+1} \dots x_n$ verschwindet, so führt dies Einsetzen zu einem Polynom in $x_{\nu+1} \dots x_n$, dessen Verschwinden noch weiter für das ursprüngliche Gebilde notwendig ist. Stößt man so auf von Null verschiedene Konstanten,

so ist das betreffende Gebilde (1) zu beseitigen, da es keine Stelle mit dem gegebenen der F gemein hat. Anderenfalls wird eine so neu hinzukommende Gleichung verwendet, um das in Behandlung befindliche Gebilde (1) in der bisherigen Weise weiter zu reduzieren. Wir gelangen damit zu Gebilden, bei denen die Zahl $n - \nu$ wieder mindestens um Eins kleiner geworden ist. Dies Verfahren werde so lange fortgesetzt, bis es, was nach endlich vielen Schritten eintreten muß, abbricht. Die Anzahl der Schritte kann beim einzelnen Gebilde (1) höchstens $n - \nu$ sein. Man gelangt so zu einer Anzahl von Gebilden der Form (1), in denen wieder die Φ irreduzibel sind. Das ursprünglich gegebene Gebilde ist in der Vereinigungsmenge dieser Gebilde enthalten. Aber nun ist auch umgekehrt die Vereinigungsmenge dieser Gebilde (1) in dem ursprünglichen Gebilde enthalten. Dies braucht nur für diejenigen Stellen eines jeden der Gebilde (1) gezeigt zu werden, die sich durch Potenzreihen in $x_{\nu+1} \ldots x_n$ darstellen lassen, denn die anderen sind Häufungsstellen von solchen. Wenn aber solche Potenzreihen eines der ursprünglichen F nicht identisch zu Null machen sollten, so könnte das Verfahren noch weiter fortgesetzt werden, während wir es jetzt als abgeschlossen annahmen. Alles in allem haben wir also folgendes Ergebnis:

Ein jedes reelle algebraische Gebilde ist identisch mit der Vereinigungsmenge von endlich vielen Gebilden der Form (1). *Darin sind die Φ im Körper der reellen Zahlen irreduzibel.*

Die Anzahl dieser Gebilde und die Gradzahlen der Φ liegen unterhalb einer Schranke, die bei gegebener Variablenzahl nur von den Graden der bei dem Reduktionsverfahren benutzten F abhängt. Sind insbesondere die F in endlicher Anzahl vorhanden, so liegt die Anzahl der Gebilde (1) *und liegen die Grade der Φ unter einer nur vom Maximalgrad der F und ihrer Anzahl abhängigen Schranke.*

Dies Ergebnis hätte auch der Theorie der Elimination entnommen werden können. Namentlich hätten wir es aus der schönen Arbeit des Herrn van der Waerden „Zur Nullstellentheorie der Polynomideale", Annalen Bd. 96, gewinnen können. Ich habe hier einen direkten Weg vorgezogen, weil er mir kürzer erscheint und weil für den Zweck, den ich verfolge, ein rein algebraischer Weg nicht notwendig ist. Auch scheint die ganze Fragestellung, die ich verfolge, nicht die Allgemeinheit zu verlangen, auf die die Ausführungen des Herrn van der Waerden zugeschnitten sind. Man müßte dann, ausgehend von van der Waerden, noch die Arbeit von Artin und Schreier „Algebraische Konstruktion reeller Körper", Hamb. Abh. Bd. 5, heranziehen. Für das Problem der Analysis, das ich im Auge habe, scheint mir das alles eine unnötig breite Basis. Noch sei aber hervorgehoben, daß die vorstehenden Ausführungen mutatis mutandis auch im komplexen Gebiet zu analogen Ergebnissen führen.

§ 2.

Wir zeigen nun, daß *ein algebraisches Gebilde* (1) *mit irreduziblen* Φ_i *aus endlich vielen Zügen besteht, deren Anzahl unterhalb einer Schranke bleibt, die allein durch die Gradzahlen der* Φ_i *bestimmt ist.* Da das ursprünglich gegebene Gebilde der $F = 0$ Vereinigungsmenge von endlich vielen Gebilden der Art (1) ist, so gilt eine analoge Aussage dann für jedes algebraische Gebilde. Die Anzahl der Gebilde (1) und die Gradzahlen Φ_i, die dabei auftreten, sind nämlich durch die Grade der bei der Reduktion benutzten F limitiert.

Wir behandeln erst den Spezialfall, in dem die höchsten Koeffizienten der Φ_i von Null verschieden sind.

Wir fassen nämlich zum Beweis Φ_i als Polynom in x_i auf, dessen Koeffizienten Polynome in $x_{\nu+1} \dots x_n$ sind. Die Diskriminante von Φ_i heiße D_i. Ferner sei $D_{\nu+i}$ der Koeffizient der höchsten in Φ_i vorkommenden Potenz von x_i. Die D sind Polynome in $x_{\nu+1} \dots x_n$, deren Grad durch den Grad von Φ_i limitiert ist. Die Komplementärmenge des algebraischen Gebildes der $D_i = 0$ $(i = 1 \dots 2\nu)$ im Raum der $x_{\nu+1} \dots x_n$ besteht nach Voraussetzung aus endlich vielen maximalen zusammenhängenden Mengen. Die Anzahl dieser zusammenhängenden Mengen ist durch die Grade der D, also durch die Grade der Φ limitiert. In jeder der endlich vielen zusammenhängenden Mengen, in die so der Raum der $x_{\nu+1} \dots x_n$ durch die $D_i = 0$ $(i = 1 \dots 2\nu)$ zerlegt wird, haben die sämtlichen Gleichungen $\Phi_i = 0$ lauter einfache Wurzeln x_i, die analytisch und regulär von $x_{\nu+1} \dots x_n$ abhängen. Sind dann an einer Stelle einer solchen zusammenhängenden Menge genau k_i Wurzeln eines $\Phi_i = 0$ reell, so sind an jeder Stelle dieser zusammenhängenden Menge genau k_i Wurzeln dieses $\Phi_i = 0$ reell. Denn ihre Anzahl kann sich nicht ändern, solange alle Wurzeln einfach sind. Sie hängen analytisch und regulär von den Koordinaten der Stelle ab. So erhalten wir $k_1 k_2 \dots k_\nu$ zusammenhängende Teilmengen des algebraischen Gebildes, die höchstens ebenso vielen reellen Zügen desselben angehören.

Um den allgemeinen Fall einer ähnlichen Behandlung, wie den eben erledigten Spezialfall, zuzuführen, fügen wir zu den D_i vor allem die übrigen Koeffizienten der Φ_i hinzu und lassen eine Fallunterscheidung eintreten je nach dem höchsten von Null verschiedenen Koeffizienten der Φ_i. Wir betrachten außerdem jetzt die Diskriminanten der so verkürzten Gleichungen $\Phi_i = 0$ und gewisse Hauptunterdeterminanten der als Determinanten geschriebenen Diskriminanten der verkürzten Φ_i:

$$a_{0i}^{n_i(n_i-1)} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_k \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{k-1} \\ \vdots & & & \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k} \end{vmatrix},$$

wo a_{0i} der höchste Koeffizient, n_i der Grad des verkürzten Φ_i ist. Es sind diejenigen Hauptunterdeterminanten, die man durch Weglassung der letzten Zeile und der letzten Kolonne, oder der beiden letzten Zeilen und der beiden letzten Kolonnen usw. erhält. Wir betrachten dann im Raume der $x_{\nu-1} \dots x_n$ die Punktmenge, auf der eine Anzahl der Anfangskoeffizienten der Φ_i verschwinden, der höchste dann verbleibende aber von Null verschieden ist. Weiter soll auf der Menge eine gewisse Hauptunterdeterminante der Diskriminante eines jeden verkürzten Φ_i von Null verschieden sein, während die höherreihigen Hauptunterdeterminanten auf der Menge verschwinden. Das ist wieder eine Einteilung in Fälle, deren Anzahl allein durch die Gradzahlen der Φ_i limitiert ist. Fassen wir nun einen bestimmten dieser Fälle ins Auge, so zerfällt die dem Raum der $x_{\nu+1} \dots x_n$ angehörige Menge in endlich viele maximale zusammenhängende Mengen. Denn sie ist die Komplementärmenge, welche der Durchschnitt zweier algebraischer Gebilde des Raumes der $x_{\nu+1} \dots x_n$ auf dem einen der beiden bestimmt. Die Variablenzahl ist kleiner als n. Also besagt die Voraussetzung des Verfahrens der vollständigen Induktion, daß die Menge aus endlich vielen Teilen besteht. Nach einem bekannten Satz des Herrn L. Baur [4]) besitzt in einer solchen zusammenhängenden Menge jedes verkürzte Φ_i eine unveränderliche Anzahl, z. B. ϱ, verschiedener Wurzeln. Dieselben werden durch eine von Herrn Baur als Stammgleichung bezeichnete Gleichung

$$\begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_{\varrho-1} & 1 \\ s_1 & \dots & s_{\varrho} & y \\ \vdots & & & \\ s_{\varrho} & \dots & s_{2\varrho-1} & y^{\varrho} \end{vmatrix} = 0$$

geliefert, welche ihrerseits nur einfache Wurzeln hat. Die s bezeichnen dabei in bekannter Weise die Potenzsummen der Wurzeln der verkürzten Gleichung $\Phi_i = 0$. Daß die Zahl der reellen dieser ϱ verschiedenen Wurzeln durch die ganze zusammenhängende Menge sich nicht ändert, während jede der reellen Wurzeln eine stetige Funktion des Ortes ist, folgt wie im Spezialfall. Die Anzahl der zusammenhängenden Mengen hängt wieder nur von den Graden der D ab und ist also durch die Grade der Φ_i limitiert.

So erhalten wir auch hier wieder eine endliche Anzahl reeller Züge, limitiert wieder durch den Grad der Φ_i.

Damit ist bewiesen, *daß auch im Raum der* $x_1 \dots x_n$ *jedes algebraische*

[4]) L. Baur, Math. Annalen **50** (1898), S. 245, vgl. auch Wissensch. Beilage zum 10. Jahresber. der Großherz. Realsch. zu Heppenheim 1900/01 und Weber, Lehrbuch der Algebra **1**, S. 171.

Gebilde aus endlich vielen reellen Zügen besteht, deren Anzahl, im Falle dasselbe durch endlich viele Null gesetzte Polynome bestimmt ist, durch den Maximalgrad derselben limitiert ist.

§ 3.

Nun soll gezeigt werden, *daß ein jedes algebraisches Gebilde in seiner Komplementärmenge endlich viele maximale zusammenhängende Mengen bestimmt, deren Anzahl im Falle eines endlichen $\mathfrak{M}$ durch den Maximalgrad der F und die Kardinalzahl von $\mathfrak{M}$ limitiert wird.*

Zum Beweise betrachte ich zunächst diejenigen Teilgebilde (1), bei denen $\nu = 1$ ist, die also aus einzelnen Flächen (oder Kurven) $\Phi(x_1 \dots x_n) = 0$ bestehen. Multipliziert man alle diese Φ miteinander, so erhält man ein Gebilde $F(x_1 \dots x_n) = 0$, das im zu untersuchenden algebraischen Gebilde enthalten ist. Zu ihm treten, um das ganze Gebilde zu erhalten, nur noch Gebilde (1), bei denen $\nu \geqq 2$ ist. Wir werden zeigen, daß die Komplementärmenge von $F = 0$ aus gewissen endlich vielen zusammenhängenden Teilmengen besteht, die durch die hinzutretenden Gebilde (1) mit $\nu \geqq 2$ nicht weiter zerlegt werden. Sind im gegebenen Gebilde solche Flächen (d. h. Gebilde (1) mit $\nu = 1$) nicht enthalten, so besteht hiernach die Komplementärmenge des Gebildes aus einer einzigen zusammenhängenden Menge.

Ich beweise also zunächst, daß die Komplementärmenge einer Fläche $F(x_1 \dots x_n) = 0$ aus endlich vielen zusammenhängenden maximalen Teilmengen besteht, deren Anzahl durch den Grad von F limitiert ist. Zum Beweise beachte ich, daß nach der schon bewiesenen ersten Behauptung das algebraische Gebilde $F(x_1 \dots x_n) = \lambda$, wo λ eine reelle Zahl ist, aus endlich vielen reellen Zügen besteht, deren Anzahl unter einer nur vom Grad von F abhängigen, von λ also unabhängigen Schranke N liegt. Bestünde nun die Komplementärmenge von $F = 0$ aus mehr als N maximalen zusammenhängenden Teilen, so wähle man in jedem derselben einen Punkt P aus, und trage seine Koordinaten in F ein. Für jeden dieser Punkte nimmt F einen gewissen Wert λ_ν an, und die Fläche $F = \lambda_\nu$ enthält diesen Punkt. Nun verbinde man alle diese Punkte P geradlinig mit dem jeweils nächst gelegenen Punkt von $F = 0$. Ist dann λ' irgendeine Zahl, so muß $F = \lambda'$ mindestens so viele Teile besitzen, als es Werte $\lambda_\nu \geqq \lambda' > 0$ oder Werte $\lambda_\nu \leqq \lambda' < 0$ gibt. Denn längs der geraden Verbindungen ist F eine stetige Funktion und jede derselben gehört ganz demselben zusammenhängenden Teil der Komplementärmenge von $F = 0$ an. Da aber die Zahl dieser Teile von $F = \lambda'$ nie N übertrifft, so kann auch die Zahl der Teile der Komplementärmenge von $F = 0$ nicht N übertreffen.

Wir betrachten nun eine einzelne dieser Teilmengen, und zeigen, daß diejenigen ihrer Punkte, welche keinem von endlich vielen Gebilden (1) mit $\nu \geqq 2$ angehören, nach wie vor eine zusammenhängende Menge bilden[5]). Es muß dazu bewiesen werden, daß man je zwei nicht den Gebilden (1) angehörige Punkte einer der Teilmengen von $F \neq 0$ durch einen Polygonzug verbinden kann, der die Gebilde (1) nicht trifft. Es genügt dazu, diesen Nachweis für zwei solche Punkte aus einem von Punkten von $F = 0$ freien Quader zu führen, dessen Seitenflächen Gleichungen $x_i = \text{konst.}$ besitzen. Denn aus endlich vielen solchen Quadern kann man einen Teilbereich der Komplementärmenge von $F = 0$ aufbauen, der die beiden ersten Punkte enthält. Keine Ebene $x_i = \text{konst.}$ kann ganz einem Gebilde (1) mit $\nu \geqq 2$ angehören, weil dessen Φ im reellen irreduzibel sind. Daher liegen auch die Punkte dieser Gebilde (1) auf jeder der Ebenen nirgends dicht. Man kann daher innerhalb der Quaderpackung die beiden ersten Punkte durch einen Polygonzug verbinden, der auf keiner Randfläche eines der Quader die Gebilde (1) trifft. Innerhalb des einzelnen Quaders liegt dann ein Polygonzug vor — man darf annehmen, eine einzelne Strecke desselben —, welche zwei Punkte aus dem Innern oder vom Rande des Quaders miteinander verbindet, Punkte, welche keinem der Gebilde (1), angehören. Daher besitzt diese Strecke nur endlich viele Punkte, welche den Gebilden (1) angehören. Sonst hätte sie mit einem dieser endlich vielen Gebilde unendlich viele Punkte gemein und gehörte daher ganz zu dem Gebilde, während sie doch an Anfang und Ende zwei, keinem der Gebilde (1) angehörige, Punkte trägt. Eine solche Strecke gilt es nun innerhalb des Quaders durch einen anderen Polygonzug zu ersetzen, welcher kein Gebilde (1) trifft, welcher aber dieselben beiden Punkte verbindet. Man darf annehmen, daß der Quader so klein ist, daß ihm nur ein solcher Treffpunkt angehört, der aber dann gleichzeitig auf mehreren der Gebilde (1) liegen kann. Wir wählen den Quader weiter so klein, daß er nur Punkte solcher Gebilde (1) enthält, welchen auch der zu untersuchende Treffpunkt angehört. Wir ändern dann die Strecke so ab, daß der neue Polygonzug eines der Gebilde nicht mehr trifft. Durch Wiederholung des Verfahrens (nach Verkleinerung der Quader) kann man dann erreichen, daß er keines der Gebilde mehr trifft. Wir fassen daher ein einzelnes Gebilde (1) ins Auge. Man darf dann annehmen, daß längs der Strecke höchstens eine der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ veränderlich, die anderen aber konstant seien. Denn man kann den Polygonzug stets aus Parallelen zu den Koordinatenachsen herstellen und die Quader so klein wählen, daß

[5]) Die nun folgende Erörterung ist nur für $n \geqq 3$ nötig und sinnvoll. Für $n = 1$ ist alles trivial. Für $n = 2$ ist klar, daß die hinzutretenden Gebilde eine endliche Punktmenge ausmachen.

einem jeden nur eine Teilstrecke angehört. Die eine längs der Strecke etwa nicht konstante der Variablen $x_{\nu+1} \dots x_n$ sei mit $x_{\nu+1}$ bezeichnet. Wir betrachten erst den Fall, daß längs der Strecke alle $x_{\nu+1} \dots x_n$ konstante Werte $\bar{x}_{\nu+1} \dots \bar{x}_n$ besitzen. Da die Strecke nur endlich viele Punkte mit dem Gebilde (1) gemein hat, gibt es unter den Φ_i gewiß solche, die nur für endlich viele x_i Null werden, wenn man $\bar{x}_{\nu+1} \dots \bar{x}_n$ einträgt. Wenn dies zunächst bei allen Φ_i so ist, so gehören zu den $\bar{x}_{\nu+1} \dots \bar{x}_n$ nur endlich viele Wertsysteme $x_1 \dots x_\nu$, für die alle Φ_i Null sind. Unsere Aufgabe ist dann die, zwei Punkte des Raumes der $x_1 \dots x_\nu$ so durch einen Polygonzug zu verbinden, daß derselbe endlich viele Punkte vermeidet. Das ist aber wegen $\nu \geqq 2$ ohne weiteres möglich. Wenn aber nach Einsetzen der $\bar{x}_{\nu+1} \dots \bar{x}_n$ einige der Φ_i identisch verschwinden, so gibt es gewiß in beliebiger Nähe dieser Stelle $\bar{x}_{\nu+1} \dots \bar{x}_n$ andere Stellen, für die keines der Φ_i identisch verschwindet. Denn anderenfalls gäbe es einen Bereich der $x_{\nu+1} \dots x_n$ und ein Φ_i, das für eine überall dichte Menge aus diesem Bereich identisch in x_i verschwindet. Dann verschwände es aus Stetigkeitsgründen für alle $x_{\nu+1} \dots x_n$ dieses Bereiches und daher für alle $x_{\nu+1} \dots x_n$ identisch, während doch kein Polynom Φ identisch verschwindet. Um den ursprünglichen Anfangs- und Endpunkt können wir aber eine Umgebung legen, die gleichfalls keine Punkte des Gebildes (1) enthält. Darin wählen wir zwei passende Punkte gleicher Koordinaten $x_{\nu+1} \dots x_n$, die keines der Φ_i zum identischen Verschwinden bringen. Diese beiden Punkte können dann mit den ursprünglichen und untereinander so verbunden werden, daß das Verbindungspolygon das Gebilde (1) nicht trifft.

Wenn aber längs der ursprünglichen Strecke $x_{\nu+1}$ variiert, dagegen die übrigen Koordinaten konstant sind, so seien P: $y_1, y_2 \dots y_\nu, y_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2} \dots \bar{x}_n$ und Q: $y_1 \dots y_\nu, z_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2} \dots \bar{x}_n$ die beiden zu verbindenden Punkte. Wir verbanden P und Q geradlinig durch eine Strecke S. Sie hat endlich viele Punkte mit dem Gebilde (1) gemein, da P nicht zum Gebilde gehört. Auf ihr liegen weiter (eventuell) endlich viele Punkte, für deren $x_{\nu+1} \dots x_n$ Koordinaten ein oder mehrere Φ identisch verschwinden. Endlich viele, weil man annehmen darf, daß P und Q nicht zu diesen Punkten gehören[6]). Die

[6]) Wenn für $y_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2}, \dots, \bar{x}_n$ oder für $z_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2}, \dots, \bar{x}_n$ ein Φ_i identisch verschwinden sollte, so kann man Nachbarwerte angeben, die unseren Forderungen genügen. Zunächst lege man um P und um Q kleine Quader, die keinen Punkt von (1) enthalten. In diesen betrachte man die Punkte, deren erste ν Koordinaten $y_1, \dots, y_\nu$ sind. Man kann dann $y'_{\nu+1}, \bar{x}'_{\nu+2}, \dots, \bar{x}'_n$ und $z'_{\nu+1}, \bar{x}'_{\nu+2}, \dots, x'_n$ so wählen, daß dafür kein Φ identisch verschwindet. Denn die $(x_{\nu+1}, \dots, x_n)$, für die ein Φ identisch verschwindet, liegen nirgends dicht. Die beiden Punkte P': $y_1, y_2, \dots, y_\nu, y'_{\nu+1}, \bar{x}'_{\nu+2}, \dots, \bar{x}'_n$ und Q': $y_1, \dots, y_\nu, z'_{\nu+1}, \bar{x}'_{\nu+2}, \dots, \bar{x}'_n$ kann man mit P bzw. Q geradlinig verbinden, ohne das Gebilde (1) zu treffen. Die geradlinige Verbindung S von P' und Q' wird dann im Text weiter betrachtet.

$x_{\nu+1}$-Koordinaten aller dieser Punkte mögen $x_{\nu+1,k}$ heißen. Unter diesen greifen wir zunächst diejenigen heraus, die neben $\bar{x}_{\nu+2} \dots \bar{x}_n$ in die Φ eingetragen, diese einzeln oder sämtlich zum identischen Verschwinden bringen. Um diese Stellen grenzen wir auf $y_{\nu+1} \leqq x_{\nu+1} \leqq z_{\nu+1}$ Intervalle ab, die keine weitere der Stellen $x_{\nu+1,k}$ im Innern oder am Rande haben, und ersetzen diese Intervalle durch Polygonzüge, die ihren Anfang mit ihrem Ende verbinden, auf denen $x_1 = y_1, \dots, x_\nu = y_\nu$ ist, und längs deren Teilstrecken jeweils eines der $x_{\nu+1} \dots x_n$ variiert, während die anderen konstant sind, und derart, daß in keinem Punkt des Polygonzuges ein Φ identisch verschwindet. Eine solche Verbindung ist möglich, weil der Raum $R_{n-\nu}$ der $x_{\nu+1} \dots x_n$ durch das algebraische Gebilde, in dessen Punkten einzelne oder mehrere der Φ identisch verschwinden, nicht zerlegt wird. Dieses algebraische Gebilde besteht nämlich aus der Vereinigungsmenge derjenigen Gebilde, in deren Punkten immer je ein Φ identisch verschwindet. Das algebraische Gebilde aber, in dem ein Φ identisch verschwindet, kann nach dem Verfahren des ersten Teiles dieser Arbeit wieder als Vereinigungsmenge von Normalgebilden der Art (1) dargestellt werden. Darunter kommt aber nun kein Gebilde vor, das durch Nullsetzen eines einzigen Polynoms $\varphi(x_{\nu+1} \dots x_n)$ erklärt wäre. Denn dann müßten die Koeffizienten von Φ alle verschwinden, wenn $\varphi = 0$ ist, und wären daher alle durch φ teilbar, während doch die Φ im Bereich der reellen Zahlen irreduzibel sein sollen. Wir haben es daher im Raum $R_{n-\nu}$ mit einem Gebilde zu tun, das durch Vereinigung von Gebilden (1) mit $\nu > 1$ entsteht. Ein solches Gebilde aber zerlegt den Raum nicht. Dies ist für den $R_{n-\nu}$ gerade die Tatsache, die wir in diesem Abschnitt für den R_n beweisen wollen. Wir nehmen sie daher im Sinne der vollständigen Induktion für alle R_k mit $k < n$ als bewiesen an, und beweisen sie hier für das nächstgrößere n. Dieser Standpunkt ist zulässig, da für $n = 2$ die in Rede stehende Tatsache richtig ist. Denn hier handelt es sich darum, daß ein Gebilde

$$\varphi_1(x_1, x_2) = 0$$
$$\varphi_2(x_2) = 0$$

mit im reellen irreduziblen φ, oder die Vereinigungsmenge von endlich vielen solchen Gebilden, den R_2 nicht zerlegt. Ein solches Gebilde besteht aber aus endlich vielen Punkten.

Nun zurück zu unserer Strecke S. Wir haben sie jetzt durch einen Streckenzug s ersetzt, derart, daß keiner seiner Punkte $x_{\nu+1} \dots x_n$-Koordinaten hat, für die ein Φ identisch verschwindet.

Auf s liegen nun nur endlich viele Punkte des Gebildes (1). Man kann einen Polygonzug s' im Quader so wählen, daß er P mit Q verbindet, daß seine Projektion auf den $R_{n-\nu}$ der $x_{\nu+1} \dots x_n$ mit der von s

übereinstimmt und daß er über den Ecken der Projektion von s das Gebilde (1) nicht trifft. Dabei wird auf die Konstanz der $x_1 \dots x_\nu$ längs s' verzichtet. Man hat nur unter Beibehaltung von P und Q über jeder Ecke der Projektion von s auf den $R_{n-\nu}$ einen nicht zu (1) gehörigen Punkt zu wählen und diese der Reihe nach geradlinig zu verbinden. Solche Punkte gibt es zu jeder Ecke der Projektion, da zu den $x_{\nu+1} \dots x_n$-Koordinaten derselben nur endlich viele Punkte von (1) gehören, deren $x_{\nu+1} \dots x_n$-Koordinaten jenen der Ecke gleich sind. Eine jede Teilstrecke dieses Polygonzuges verbindet nun wieder zwei Punkte, die dem Gebilde (1) nicht angehören, und besitzt eine Projektion auf den $R_{n-\nu}$, längs der nur eines der $x_{\nu+1} \dots x_n$ sich ändert.

Fassen wir eine der Teilstrecken ins Auge und bezeichnen wieder für den Moment das sich ändernde der $x_{\nu+1} \dots x_n$ mit $x_{\nu+1}$. Können wir dann die Strecke durch einen Polygonzug ersetzen, längs dem

$$x_{\nu+2} = \bar{x}_{\nu+2} \dots x_n = \bar{x}_n$$

fest bleiben und längs dem zwei der Φ des Gebildes z. B.

$$\Phi_1(x_1, x_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2}, \dots, \bar{x}_n)$$

und

$$\Phi_2(x_2, x_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2}, \dots, \bar{x}_n)$$

nie gleichzeitig verschwinden, so ist unser Ziel erreicht. Wir wählen dabei die Bezeichnung Φ_1 und x_1 so, daß Φ_1 im Anfangspunkt der Strecke nicht Null ist. Wir lassen sich längs dem neu zu bildenden Polygonzug $x_3 \dots x_\nu$ als Funktionen von $x_{\nu+1}$ genau so ändern wie längs der abzuändernden Strecke und schreiben für x_1 und x_2 zur Erklärung des neuen Polygonzuges neue Funktionen von $x_{\nu+1}$ vor. Dazu betrachten wir den Raum der $x_1, x_2, x_{\nu+1}$ und das Gebilde

$$(1') \qquad \begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2}, \dots, \bar{x}_n) &= 0, \\ \Phi_2(x_2, x_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2}, \dots, \bar{x}_n) &= 0. \end{aligned}$$

Die Endpunkte unserer Strecke projizieren wir auf diesen Raum, d. h. wir nehmen die Punkte desselben, deren $x_1, x_2, x_{\nu+1}$-Koordinaten mit denen von Anfang und Ende unserer Strecke übereinstimmen. Durch diese legen wir ein Büschel zweidimensionaler Ebenen. Mindestens eine derselben hat nur endlich viele Punkte mit dem Gebilde (1′) gemein.

Denn sowohl $\Phi_1 = 0$ wie $\Phi_2 = 0$ definiert je ein algebraisches Gebilde, das in endlich viele irreduzible durch Potenzreihen in $x_{\nu+1}$ darstellbare [7]) zerfällt. Tragen wir ein Paar solcher Potenzreihen in die Ebenen-

[7]) Für kein längs unserer Strecke in Betracht kommendes $x_{\nu+1}$ kann nach Voraussetzung Φ_1 oder Φ_2 identisch verschwinden.

gleichung ein, so wird ihre linke Seite eine algebraische Funktion von $x_{\nu+1}$, die endlich viele Nullstellen besitzt oder identisch verschwindet. Eine Ebene des Büschels hat also mit dem Gebilde (1′) endlich viele Punkte oder eine algebraische Kurve gemein. Zu dieser gehört jedenfalls nicht die Trägergerade des Büschels, weil in einem ihrer Punkte Φ_1 nicht verschwindet. Daher kann eine jede der im Gebilde (1′) enthaltenen ebenen algebraischen Kurven nur einer Büschelebene angehören. Im Gebilde (1′) sind aber den endlich vielen zu einer Stelle $x_{\nu+1}$ gehörigen Potenzreihenpaaren entsprechend nur endlich viele ebene algebraische Kurven enthalten. Daher gibt es im Büschel Ebenen, die mit (1′) nur endlich viele Punkte gemein haben. In einer solchen Ebene ziehen wir einen unsere beiden Punkte verbindenden Polygonzug, der das Gebilde (1′) meidet. Ihm entspricht in der bereits angegebenen Weise ein Polygonzug im R_n, der (1) nicht trifft.

§ 4.

Nun bleibt noch der Beweis unserer dritten Behauptung übrig: Sie besagte, *daß der Durchschnitt zweier algebraischer Gebilde auf jedem derselben eine Komplementärmenge bestimmt, die aus endlich vielen maximalen zusammenhängenden Teilmengen besteht.*

Es seien G und H die beiden algebraischen Gebilde. Es genügt zu zeigen, daß der Durchschnitt von G und H auf G eine aus endlich vie'en Stücken bestehende Komplementärmenge bestimmt. Da G nun wieder als Vereinigungsmenge von endlich vielen Gebilden der Art (1) dargestellt werden kann, so genügt es, den Beweis unter der Annahme zu führen, daß G ein Gebilde der Art (1) ist. Der Durchschnitt wird gewonnen, indem man zu den G definierenden Gleichungen die H definierenden hinzunimmt. Der im ersten Teil verwendete Reduktionsprozeß kann nun hier so angesetzt werden, daß man zunächst die sich aus dem Gebilde (1), d. i. G, ergebenden Potenzreihen in die Gleichungen von H einträgt und so lauter Polynome in $x_{\nu+1} \dots x_n$ gewinnt. Nun betrachte man erst das durch Nullsetzen dieser Polynome in $x_{\nu+1} \dots x_n$ erhaltene Gebilde für sich und reduziere es nach dem Verfahren des ersten Teiles auf die Vereinigungsmenge von endlich vielen Gebilden (1). Zu einem jeden derselben nehme man wieder G hinzu und prüfe durch Einsetzen in die Gleichungen von H, ob das ganze Gebilde H angehört. Andernfalls kann man durch Hinzunahme eines neuen so erhaltenen Polynomes das Verfahren wieder fortsetzen, bis es zum Abschluß kommt. Hiernach sieht man, daß man den Durchschnitt als Vereinigungsmenge von endlich vielen Gebilden darstellen kann, die aus G durch Hinzunahme von Gleichungen H' der Art (1) zwischen den $x_{\nu+1} \dots x_n$ allein entsteht. Das ist aber nun eine Situation

ähnlich der, der wir uns im § 2 gegenüber sahen, als wir zu (1) die Polynome D hinzunahmen. Wir können die dortigen Schlüsse wiederholen, indem wir jetzt außer den Polynomen D die Polynome H' hinzunehmen. Die Zahl der erhaltenen maximalen zusammenhängenden Mengen hängt dann auch wieder nur von den Gradzahlen der benutzten Polynome ab, ist also für den Fall, daß sowohl G wie H durch endliche viele Polynome definiert sind, allein vom Maximalgrad und der Anzahl der Polynome limitiert. Im einzelnen gestaltet sich die Beweisführung wie folgt.

Wir betrachten im Raume der $x_{\nu+1} \dots x_n$ das durch Nullsetzen der H' entstehende Gebilde H''. Außerdem seien D_i die in § 2 betrachteten Funktionen eines Gebildes G von der Form (1). Auf H'' betrachten wir vorab die Punkte, in denen keines der D verschwindet, d. h. wo das Produkt Δ aller D von Null verschieden ist. Es handelt sich also um die auf H'' gelegene Komplementärmenge des Durchschnittes von H'' und $\Delta = 0$. Diese besteht nach Voraussetzung (Variablenzahl kleiner als n) aus endlich vielen maximalen zusammenhängenden Teilen. In jedem derselben ist nach den in § 2 dargelegten Gründen die Zahl der reellen verschiedenen Wurzeln eines jeden Φ des Gebildes (1) unveränderlich und eine jede Wurzel hängt stetig von den Koordinaten $x_{\nu+1} \dots x_n$ ab. Diese Probe mag zeigen, wie sich die Methode von § 2 im vorliegenden Fall anwenden läßt. Es handelt sich ja dann weiter darum, statt des Gebildes H'' eines zu nehmen, das durch die Gleichungen H', Nullsetzen einiger D und von Unterdeterminanten solcher erklärt ist, und auf ihm die Punkte zu betrachten, wo andere D bzw. Unterdeterminanten solcher von Null verschieden sind. Auf dieser Punktmenge sind dann wieder die reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen zu betrachten, die aus den $\Phi = 0$ dadurch hervorgehen, daß einige derselben durch die in § 2 betrachteten Stammgleichungen ersetzt werden.

(Eingegangen am 16. August 1929.)

Zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen.

Von

Friedrich Engel in Gießen.

In den Leipziger Berichten habe ich 1886 unter demselben Titel eine Abhandlung veröffentlicht. Darin habe ich gezeigt, daß diese Theorie auf die Untersuchung einer trilinearen Form

$$F(x, y, u) = \sum_{i,k,s}^{1\ldots r} c_{iks} x_i y_k u_s$$

hinauskommt, von der zwei Kovarianten identisch verschwinden. Die eine, die vom ersten Grade in den c_{iks} ist, sagt aus, daß F in bezug auf x und y alternierend ist. Die zweite ist vom zweiten Grade in den c_{iks}; ihr Verschwinden ist eine Folge der Jacobischen Identität.

Damals waren mir die Methoden der Invariantentheorie noch vollkommen fremd und ich verstand insbesondere nicht, die symbolische Methode zu handhaben. Ich mußte mich daher damit begnügen, die Aufgabe auszusprechen und einige Folgerungen zu ziehen, die sich unmittelbar darboten. Ich möchte jetzt wieder darauf zurückkommen und zeigen, wie man die Aufgabe mit den Hilfsmitteln der symbolischen Methode angreifen kann. Es erscheint mir diese Untersuchung ganz geeignet, um sie meinem früheren Leipziger Kollegen O. Hölder zum siebzigsten Geburtstage darzubringen, denn die Algebra und insbesondere die Theorie der diskontinuierlichen Gruppen sind eines seiner Arbeitsgebiete.

§ 1.

Die trilineare Form.

Es seien $X_1 f, \ldots, X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, und

$$(X_i X_k) = \sum_{s}^{1\ldots r} c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

seien die bekannten Lieschen Beziehungen, in denen sie stehen. Da der Klammerausdruck $(X_i X_k)$ alternierend ist, sind hier die Konstanten c_{iks} durch die Gleichungen: $c_{iks} + c_{kis} = 0$ verknüpft.

Wir deuten mit Lie die allgemeine infinitesimale Transformation: $Xf = \sum x_i X_i f$ der Gruppe als einen Punkt x in einem Raume R_{r-1}. Der Klammerausdruck

$$(\sum x_i X_i f, \sum y_k X_k f) = \sum_{iks} c_{iks} x_i y_k X_s f$$

wird dann durch einen Punkt des R_{r-1} dargestellt, dessen Gleichung in Ebenenkoordinaten u so lautet:

$$\sum_{iks}^{1 \ldots r} c_{iks} x_i y_k u_s = 0.$$

Wir haben somit eine trilineare Form, die wir nach Studys Vorgange folgendermaßen darstellen können:

$$(1) \qquad (ax)(by)(u\alpha).$$

Dabei ist α ein Symbol erster Stufe, während a, b Symbole $(r-1)$-ter Stufe sind, deren Vertauschung einen Zeichenwechsel der Form bedingt, so daß die Kovariante ersten Grades

$$(2) \qquad (ax)(by)(u\alpha) + (ay)(bx)(u\alpha) \equiv 0$$

ist.

Setzen wir

$$(ax)(by)(u\alpha) = (u\xi),$$

so ist ξ der Bildpunkt der infinitesimalen Transformation (XY), die aus Xf und $Yf = \sum y_k X_k f$ durch Klammeroperation hervorgeht. Nehmen wir daher noch eine dritte infinitesimale Transformation: $Zf = \sum z_j X_j f$ hinzu, so wird der Bildpunkt η der infinitesimalen Transformation $((XY)Z)$ durch

$$(u\eta) = (a\xi)(bz)(u\alpha) = (a_1 x)(b_1 y)(a_2 \alpha_1)(b_2 z)(u\alpha_2)$$

bestimmt, und die Jacobische Identität

$$((XY)Z) + ((YZ)X) + ((ZX)Y) \equiv 0$$

sagt aus, daß die Kovariante zweiten Grades

$$(3) \qquad \sum_{x,y,z} (a_1 x)(b_1 y)(a_2 \alpha_1)(b_2 z)(u\alpha_2) \equiv 0$$

ist, unter $\sum$ die zyklische Summe in bezug auf x, y, z verstanden.

Betrachtet man in

$$(4) \qquad (ux) + (ax)(b\xi)(u\alpha)\,\delta t$$

den Punkt ξ als einen Parameter, so hat man eine Schar von infinitesimalen linearen homogenen Transformationen. Für die Zuwachse $\delta x, \delta u$, die der allgemeinen infinitesimalen Transformation dieser Schar entsprechen, wird

$$\delta(ux) = (u\,\delta x) + (\delta u\, x) = 0,$$

sie sind daher bestimmt durch

$$(4') \qquad (ax)(b\xi)(\omega\alpha)\,\delta t = (\omega\,\delta x),$$

$$(4'') \qquad -(a\zeta)(b\xi)(u\alpha)\,\delta t = (\delta u\,\zeta),$$

unter ω eine willkürliche Ebene und unter ζ einen willkürlichen Punkt verstanden. Es ergibt sich demnach:

$$\frac{\delta}{\delta t}(a_2 x)(b_2 y)(u\alpha_2) = (a_1 x)(b_1\xi)(a_2\alpha_1)(b_2 y)(u\alpha_2) + \\ + (a_1 y)(b_1\xi)(a_2 x)(b_2\alpha_1)(u\alpha_2) - (a_2 x)(b_2 y)(a_1\alpha_2)(b_1\xi)(u\alpha_1),$$

wo die rechte Seite wegen (2) in der Form

$$\sum_{x,\xi,y}(a_1 x)(b_1\xi)(a_2\alpha_1)(b_2 y)(u\alpha_2)$$

geschrieben werden kann und somit nach (3) identisch verschwindet. Die Jacobische Identität kommt daher darauf hinaus, daß die trilineare Form (1) bei allen infinitesimalen Transformationen unserer Schar (4) invariant bleibt.

Das Liesche Symbol für die infinitesimale Transformation (4) lautet:

$$\mathfrak{X}f = \sum_{k}^{1\ldots r}\xi_k\,\mathfrak{E}_k f = (a_1 x)(b_1\xi)(u\alpha_1), \quad \text{wo } u = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Bilden wir daher aus $\mathfrak{X}f$ und

$$\mathfrak{Y}f = (a_2 x)(b_2\eta)(u\alpha_2)$$

den Klammerausdruck, so kommt:

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = (a_1 x)(b_1\xi)(a_2\alpha_1)(b_2\eta)(u\alpha_2) - (a_1 x)(b_1\eta)(a_2\alpha_1)(b_2\xi)(u\alpha_2),$$

was nach (2) und (3) in der Form

$$(a_1\xi)(b_1\eta)(a_2 x)(b_2\alpha_1)(u\alpha_2)$$

geschrieben werden kann, oder, wenn man ζ durch

$$(a_1\xi)(b_1\eta)(\omega\alpha_1) = (\omega\zeta)$$

bestimmt, auch so:

$$(a_2 x)(b_2\zeta)(u\alpha_2).$$

Hierin liegt, daß die infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{X}f$ eine lineare homogene Gruppe erzeugen, die zu der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ isomorph ist, nämlich die zugehörige adjungierte Gruppe.

Es verdient, erwähnt zu werden, daß man die trilineare Form (1) auch so darstellen kann:

$$(1') \qquad (\beta_1 \dots \beta_{r-2}\, x\, y)\,(u\,\lambda),$$

wo alle Symbole von erster Stufe sind und wo die Vertauschung zweier Symbole β einen Zeichenwechsel bewirkt, während die Vertauschung eines Symbols β mit dem Symbole λ nicht zulässig ist. Die Identität (3) erscheint dann in der Form

$$\sum_{x,\,y,\,z} (\beta_1 \dots \beta_{r-2}\, x\, y)\,(\beta'_1 \dots \beta'_{r-2}\, \lambda\, z)\,(u\,\lambda') = 0$$

und kann daher die einfache Gestalt

$$(3') \qquad (\beta_1 \dots \beta_{r-3}\, x\, y\, z)\,(\beta_{r-2}\,\beta'_1 \dots \beta'_{r-2}\,\lambda)\,(u\,\lambda') \equiv 0$$

erhalten.

§ 2.

Die Gliederzahlen der derivierten und der adjungierten Gruppe.

Die derivierte Gruppe der Gruppe $X_1 f, \dots, X_r f$ wird erzeugt von allen infinitesimalen Transformationen, die aus den Transformationen

$$(\sum x_i X_i f,\ \sum y_k X_k f) = \sum_{i,k,s} c_{iks}\, x_i\, y_k\, X_s f$$

linear ableitbar sind. Ihre Gliederzahl ist daher gleich der Anzahl der linear unabhängigen unter den Ausdrücken: $(a\,x)\,(b\,y)\,(u\,\alpha)$, die erhalten werden, wenn man für x, y alle möglichen Punktepaare des R_{r-1} setzt. Definieren wir den Punkt ξ_i durch

$$(a\,x_i)\,(b\,y_i)\,(\omega\,\alpha) = (\omega\,\xi_i),$$

so ist diese Gliederzahl nichts anderes als der Rang der Determinante $(\xi_1 \dots \xi_r)$ bei ganz beliebiger Wahl der $2r$ Punkte x_i, y_i. Hat die Determinante den Rang m, so bilden wir den Ausdruck

$$U = (\xi_1 \dots \xi_m\, x\, \eta_{m+2} \dots \eta_r),$$

wo x einen veränderlichen Punkt und $\eta_{m+2}, \dots, \eta_r$ willkürliche Punkte bezeichnen. Führen wir dann die infinitesimale Transformation (4') auf U aus, so kommt:

$$\frac{\delta U}{\delta t} = (a\,x)\,(b\,\underline{x})\,(\xi_1 \dots \xi_m\,\alpha\,\eta_{m+2} \dots \eta_r) \equiv 0.$$

Verstehen wir daher unter $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$ $2m$ fest gewählte Punkte von allgemeiner Lage, so stellt die Gleichung $U = 0$ bei willkürlichen η_{m+k} eine $(m-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit E_{m-1} des R_{r-1} dar, die bei der adjungierten Gruppe invariant bleibt und das Bild der

m-gliedrigen derivierten Gruppe ist. Jede durch diese E_{m-1} gehende ebene Mannigfaltigkeit ist dann ebenso wie die E_{m-1} selber das Bild einer invarianten Untergruppe der r-gliedrigen.

Die Gliederzahl der adjungierten Gruppe ist die Zahl der von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen, die man erhält, wenn man in

$$(a\,x)\,(b\,\mathfrak{x})\,(u\,\alpha)$$

den Punkt $\mathfrak{x}$ auf alle möglichen Arten wählt. Definieren wir die Ebene $\mathfrak{u}_i$ bei willkürlichem ξ durch

$$(a\,x_i)\,(b\,\xi)\,(u_i\,\alpha) = (\mathfrak{u}_i\,\xi),$$

so ist diese letztere Zahl der Rang, den die Determinante $(\mathfrak{u}_1 \ldots \mathfrak{u}_r)$ bei unbestimmten $x_1, u_1, \ldots, x_r, u_r$ hat. Ist dieser Rang l, so verschwindet der Ausdruck

$$(a\,x)\,(\mathfrak{u}_1 \ldots \mathfrak{u}_l\; b\,\omega_{l+2} \ldots \omega_r)\,(u\,\alpha)$$

bei willkürlichen $\omega_{l+2} \ldots \omega_r$ identisch, es bestehen also zwischen den r infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{E}_1 f, \ldots, \mathfrak{E}_r f$ der adjungierten Gruppe $r - l$ unabhängige lineare homogene Relationen mit konstanten Koeffizienten. Diese Relationen haben die Gestalt $\sum \mathfrak{x}_k \mathfrak{E}_k f = 0$, wo der Punkt $\mathfrak{x}$ durch

$$(\mathfrak{u}_1 \ldots \mathfrak{u}_l\, \omega\, \omega_{l+1} \ldots \omega_r) = (\omega\,\mathfrak{x})$$

bestimmt ist, unter $\omega, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_r$ willkürliche Ebenen verstanden. Hieraus folgt, daß die infinitesimalen Transformationen von der Form $\sum \mathfrak{x}_k X_k f$ mit allen infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \ldots, X_r f$ vertauschbar und also ausgezeichnete infinitesimale Transformationen der Gruppe sind. In der Tat ist ja $(a\,x)\,(b\,\mathfrak{x})\,(u\,\alpha)$ für jeden so darstellbaren Punkt $\mathfrak{x}$ identisch null.

§ 3.

Die Kovariante erster Ordnung und ersten Grades.

Die Form (1) hat eine Kovariante erster Ordnung und ersten Grades:

$$(a\,x)\,(b\,\alpha), \tag{5}$$

die gleich $(u\,x)$ gesetzt eine kovariante Ebene u bestimmt. Ersetzt man in (1) u durch diese Ebene, so findet man einen kovarianten linearen Komplex:

$$(a_1\,x)\,(b_1\,y)\,(a_2\,\alpha_1)\,(b_2\,\alpha_2). \tag{6}$$

Aber aus der Identität (3) folgt:

$$(a_1\,x)\,(b_1\,y)\,(a_2\,\alpha_1)\,(b_2\,\alpha_2) + (a_1\,y)\,(b_1\,\alpha_2)\,(a_2\,\alpha_1)\,(b_2\,x) + \\ + (a_1\,\alpha_2)\,(b_1\,x)\,(a_2\,\alpha_1)\,(b_2\,y) \equiv 0,$$

wo die beiden letzten Glieder wegen (2) einander aufheben, so daß der Ausdruck (6) identisch verschwindet. Ist nun (5) nicht identisch null, so stellt die dadurch bestimmte Ebene u eine invariante $(r-1)$-gliedrige Untergruppe unserer r-gliedrigen Gruppe dar. Setzen wir andererseits wie früher: $(a\,x_i)\,(b\,y_i)\,(\omega\,\alpha) = (\omega\,\xi_i)$, so ist $(a_2\,\xi_i)\,(b_2\,\alpha_2) = 0$ und demnach $(\xi_1 \ldots \xi_r) = 0$; d. h. die derivierte Gruppe ist höchstens $(r-1)$-gliedrig und in dieser invarianten Untergruppe enthalten. Bei einer r-gliedrigen Gruppe, die ihre eigene Derivierte ist, muß daher die Kovariante (5) identisch verschwinden.

§ 4.

Die Kovariante zweiter Ordnung und zweiten Grades.

Diese Kovariante hat die Form

$$(a_1\,x)\,(a_2\,x)\,(b_1\,\alpha_2)\,(b_2\,\alpha_1) \tag{7}$$

und ist in der charakteristischen Gleichung r-ten Grades, die zu der allgemeinen infinitesimalen Transformation $\sum x_k\,\mathfrak{E}_k f$ der adjungierten Gruppe gehört, der Koeffizient des Gliedes $(r-2)$-ter Ordnung, wenn dabei vom Vorzeichen abgesehen wird. Sie ist die Funktion, die Cartan in seiner Thèse[1]) mit ψ_2 bezeichnet.

Durch (7) wird im R_{r-1} eine Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung definiert, in bezug auf die der Punkt $\mathfrak{x}$ die Polarebene

$$(a_1\,x)\,(a_2\,\mathfrak{x})\,(b_1\,\alpha_2)\,(b_2\,\alpha_1) = 0 \tag{8}$$

hat. Ist $\mathfrak{x}$ insbesondere der Bildpunkt einer ausgezeichneten infinitesimalen Transformation der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$, so verschwindet der Ausdruck

$$(a_2\,\mathfrak{x})\,(b_2\,\xi)\,(u\,\alpha_2),$$

wie wir wissen, identisch für alle ξ und u. Für jeden solchen Punkt verschwindet daher auch die linke Seite von (8) identisch, seine Polarebene wird daher unbestimmt. Demnach kann die Determinante der quadratischen Form (7) nur dann von Null verschieden sein, wenn die Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält, d. h. wenn ihre adjungierte Gruppe r-gliedrig ist.

§ 5.

Die trilineare alternierende Kovariante.

Ersetzen wir in (1) die Ebene u durch die Polarebene des Punktes z in in bezug auf die Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung, bestimmen wir also u durch

$$(a_2\,z)\,(a_3\,\xi)\,(b_2\,\alpha_3)\,(b_3\,\alpha_2) = (u\,\xi),$$

[1]) Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Paris 1894.

bei willkürlichem ξ, so erhalten wir eine kovariante trilineare Form in Punktkoordinaten, nämlich:

$$(9) \qquad (a_1 x)(b_1 y)(a_2 z)(a_3 \alpha_1)(b_2 \alpha_3)(b_3 \alpha_2).$$

Diese trilineare Form hat Cartan, wenigstens implizit, schon in seiner Thèse von 1894 benutzt. Ihr identisches Verschwinden ist nämlich, wie er zeigt, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ integrabel ist. Dagegen hat er, jedenfalls damals, nicht bemerkt, daß (9) die Eigenschaft besitzt, in x, y, z allen dreien alternierend zu sein.

Um diese Eigenschaft der Form (9) möglichst bequem zu beweisen, benutzen wir für die Form (1) die andre symbolische Darstellung:

$$(1') \qquad (\beta_1 \ldots \beta_{r-2} x y)(u \lambda).$$

Die Kovariante (7) erscheint dann in der Gestalt

$$(7') \qquad (\beta_1 \ldots \beta_{r-2} \lambda' x)(\beta_1' \ldots \beta_{r-2}' \lambda x)$$

und die trilineare Form (9) wird

$$(9') \qquad (\beta_1 \ldots \beta_{r-2} x y)(\beta_1' \ldots \beta_{r-2}' \lambda'' \lambda)(\beta_1'' \ldots \beta_{r-2}'' \lambda' z) = \Phi.$$

Vertauscht man hier λ'' mit den Ausdrücken in der ersten Klammer, so kommt

$$\begin{aligned} \Phi = {} & (r-2)(\beta_1 \ldots \beta_{r-3} \lambda'' x y)(\beta_1' \ldots \beta_{r-2}' \beta_{r-2} \lambda)(\beta_1'' \ldots \beta_{r-2}'' \lambda' z) + \\ & + (\beta_1 \ldots \beta_{r-2} \lambda'' y)(\beta_1' \ldots \beta_{r-2}' x \lambda)(\beta_1'' \ldots \beta_{r-2}'' \lambda' z) + \\ & + (\beta_1 \ldots \beta_{r-2} x \lambda'')(\beta_1' \ldots \beta_{r-2}' y \lambda)(\beta_1'' \ldots \beta_{r-2}'' \lambda' z). \end{aligned}$$

Hier aber ist die erste Zeile identisch null und zwar wegen (3'), wie man sofort erkennt, wenn man sich in (3') die Größe z durch λ'' ersetzt denkt und $(u \lambda')$ durch $(\beta_1'' \ldots \beta_{r-2}'' \lambda' z)$. Schreibt man nun Φ in der Form

$$\begin{aligned} \Phi = {} & -(\beta_1 \ldots \beta_{r-2} \lambda'' y)(\beta_1' \ldots \beta_{r-2}' \lambda x)(\beta_1'' \ldots \beta_{r-2}'' \lambda' z) + \\ & + (\beta_1 \ldots \beta_{r-2} \lambda'' x)(\beta_1' \ldots \beta_{r-2}' \lambda y)(\beta_1'' \ldots \beta_{r-2}'' \lambda' z), \end{aligned}$$

so sieht man, daß es in x, y, z zyklisch ist. Da es aber in x, y alternierend ist, so ist es überhaupt in je zwei der Größen x, y, z alternierend.

Vertauscht man in (9') z mit den Ausdrücken in der ersten Klammer, so gelangt man zu einer Darstellung

$$(9'') \qquad \Phi = \frac{r-2}{3}(\beta_1 \ldots \beta_{r-3} x y z)(\beta_1' \ldots \beta_{r-2}' \lambda'' \lambda)(\beta_1'' \ldots \beta_{r-2}'' \lambda' \beta_{r-2}),$$

welche die eben bewiesene Eigenschaft von Φ unmittelbar sichtbar macht.

Als ich vor zwei Jahren bemerkte, daß die Form (9) oder (9') vollständig alternierend ist, und diesen Satz Cartan mitteilte, machte er mich

darauf aufmerksam, daß der Satz bereits 1926 in einer gemeinsamen Note[2]) von ihm und J. A. Schouten aufgestellt und bewiesen war. Ich fühlte mich etwas beschämt, daß mir das entgangen war, um so mehr, als gerade diese Note von Cartan und Schouten mein altes Problem von 1886 invariantentheoretisch behandelte, allerdings mit Benutzung einer ganz andern Symbolik. Wenn ich trotzdem den Satz hier mitteile und auf neue Art beweise, so geschieht das, weil sonderbarerweise weder Cartan noch Schouten auf die große Wichtigkeit hinweisen, die der Satz für die Theorie der Zusammensetzung hat. Es ist mir offen gestanden ein Rätsel, daß sie jeden Hinweis in dieser Richtung unterlassen haben. Ich kann es mir daher nicht versagen, das von ihnen Versäumte nachzuholen.

Cartan hat in seiner Thèse gezeigt, daß die einfachen und halbeinfachen r-gliedrigen Gruppen dadurch gekennzeichnet sind, daß für sie die quadratische Form (7) eine nicht verschwindende Determinante hat. Nehmen wir nun an, daß die Zusammensetzung c_{iks} eine Form (7) von nicht verschwindender Determinante liefert, so können wir durch eine lineare homogene Transformation der x_i erreichen, daß (7) die Form $x_1^2 + \ldots + x_r^2$ erhält. Dann aber erscheint die trilineare alternierende Form (9) in der Gestalt

$$\sum_{i,k,s}^{1\ldots r} c_{iks}\, x_i\, y_k\, z_s,$$

d. h. die c_{iks} sind vollständig alternierend. Es gilt also der

Satz. *Für jede r-gliedrige einfache oder halbeinfache Gruppe kann man eine solche Basis von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen wählen, daß in den Relationen*

$$(X_i X_k) = \sum_{s}^{1\ldots r} c_{iks}\, X_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

die c_{iks} in bezug auf je zwei der Indizes i, k, j alternierend werden.

Ist umgekehrt eine r-gliedrige Gruppe so beschaffen, daß sie eine Basis $X_1 f, \ldots, X_r f$ besitzt mit alternierenden c_{iks}, so ist offenbar die Gliederzahl ihrer derivierten Gruppe gleich der Gliederzahl ihrer adjungierten Gruppe. Erinnern wir uns daher an das in § 4 Gesagte, so sehen wir, daß für eine r-gliedrige Gruppe, bei der die quadratische Form nicht ausgeartet ist, nicht bloß die adjungierte sondern auch die derivierte Gruppe r-gliedrig ist. Dieser Satz ergibt sich hier mit der größten Leichtigkeit, ohne daß man den Cartanschen Satz über die halbeinfachen Gruppen zu benutzen braucht.

---

[2]) On the geometry of the group-manifold of simple and semi-simple groups. Amsterdamer Akademie **29**, Nr. 6, siehe besonders S. 809 f.

§ 6.

Anwendung auf die Zusammensetzung der allgemeinen projektiven Gruppe der Ebene.

Als Basis benutzen wir die acht infinitesimalen Transformationen

(10) $$p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp,\ xp+yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q,$$

die in dieser Reihenfolge die Nummern $1 \ldots 8$ bekommen sollen. Die infinitesimale Transformation $\mathfrak{E}_k f$ der adjungierten Gruppe schreiben wir in der Form

$$\sum_i^{1\ldots8}\Big(\sum_s^{1\ldots8} c_{iks}u_s\Big)x_i = -\sum_s\Big(\sum_i c_{kis}x_i\Big)u_s = -\sum_s a_{ks}u_s.$$

Dann lautet die quadratische Form (7) so:

$$\sum_{k,s}^{1\ldots8} a_{ks}a_{sk}.$$

Die $E_k f$ lauten der Reihe nach:

(11)
$$\begin{aligned}
&-u_2x_3-u_1x_4-u_1x_6-\Big(\tfrac{1}{2}u_4+\tfrac{3}{2}u_6\Big)x_7-u_5x_8,\\
&u_2x_4-u_1x_5-u_2x_6-u_3x_7+\Big(\tfrac{1}{2}u_4-\tfrac{3}{2}u_6\Big)x_8,\\
&u_2x_1+2u_3x_4-u_4x_5-u_7x_8,\\
&u_1x_1-u_2x_2-2u_3x_3+2u_5x_5-u_7x_7+u_8x_8,\\
&u_1x_2+u_4x_3-2u_5x_4-u_8x_7,\\
&u_1x_1+u_2x_2-u_7x_7-u_8x_8,\\
&\Big(\tfrac{1}{2}u_4+\tfrac{3}{2}u_6\Big)x_1+u_3x_2+u_7x_4+u_8x_5+u_7x_6,\\
&u_5x_1+\Big(-\tfrac{1}{2}u_4+\tfrac{3}{2}u_6\Big)x_2+u_7x_3-u_8x_4+u_8x_6.
\end{aligned}$$

Die Kovariante (7) wird

(12) $$3x_4^2+x_6^2+3x_3x_5-3x_1x_7-3x_2x_8.$$

Führt man die durch sie bestimmte dualistische Transformation auf die Ebene u in der trilinearen Form: $\sum y_k\mathfrak{E}_k f$ aus, so erhält man die trilineare alternierende Form in Punktkoordineten:

(13) $$2(345)+(147)+(167)+(257)+(138)-(248)+(268),$$

wo

$$(ikj)=\begin{vmatrix} x_i & x_k & x_j\\ y_i & y_k & y_j\\ z_i & z_k & z_j\end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Bringt man endlich durch die Substitution

$$x_4 = x_4', \quad x_6 = \sqrt{3}\, x_6', \quad x_3 = x_3' + i\, x_5', \quad x_5 = x_3' - i\, x_5',$$
$$x_1 = x_1' + i\, x_7', \quad x_7 = -x_1' + i\, x_7', \quad x_2 = x_2' + i\, x_8', \quad x_8 = -x_2' + i\, x_8'.$$

die Form (12) auf die Gestalt $\sum x_k'^2$, so bekommt man nach Weglassung des Faktors $2i$ die trilineare alternierende Form

$$(14) \qquad -2(345) + (147) - (248) + \sqrt{3}(167) + \sqrt{3}(268) + \\ + (138) + (125) + (237) + (578),$$

deren Koeffizienten c_{iks} eine Form für die Zusammensetzung der allgemeinen projektiven Gruppe der Ebene darstellen. Unter den reellen Formen dieser Zusammensetzung ist das eine der bemerkenswertesten. Sie läßt fünf einfache dreigliedrige Untergruppen hervortreten, nämlich:

$$X_3, X_4, X_5; \quad X_1, X_3, X_8; \quad X_1, X_2, X_5; \quad X_3, X_3, X_7; \quad X_5, X_7, X_8.$$

(Eingegangen am 28. Juli 1929.)

Die Äquivalenz der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte negativer Ordnung.

Von

F. Hausdorff in Bonn.

Die Cesàroschen Mittel α-ter Ordnung

$$C_\alpha x_n = \frac{\Pi(n)\,\Pi(\alpha)}{\Pi(n+\alpha)}\, S^\alpha x_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+\alpha-1}{m} x_{n-m} : \binom{n+\alpha}{n}$$

einer Folge x_n, ursprünglich für $\alpha = k$ (k natürliche Zahl) eingeführt, sind durch die angegebene Formel für alle reellen α außer $\alpha = -k$ definiert. Die Hölderschen Mittel α-ter Ordnung $H^\alpha x_n$, ursprünglich für $\alpha = k$ rekursiv durch

$$H^k x_n = \sum_{m=0}^{n} H^{k-1} x_n : (n+1)$$

mit $H^0 x_n = x_n$ erklärt, lassen sich in natürlicher Weise für alle reellen α definieren[1]); sie bilden, da die Ordnung sich wie ein Exponent verhält ($H^\alpha (H^\beta x_n) = H^{\alpha+\beta} x_n$), theoretisch die einfachste Skala von Limitierungs- oder Summierungsmethoden, während praktisch die Cesàrosche Skala gewisse Vorteile bietet. Beide sind durch den *Äquivalenzsatz* verbunden, der für $\alpha = k$ durch die Herren Knopp und Schnee bewiesen wurde, aber für alle $\alpha > -1$ gilt (a. a. O. [1]), S. 90, 96): mit $C_\alpha x_n \to x$ ist $H^\alpha x_n \to x$ und umgekehrt. Im folgenden wird die Beziehung beider Skalen für $\alpha \leqq -1$ betrachtet. Dabei ist zunächst zu beachten, daß $C_{-k} x_n$ nicht existiert; wir lassen aus $C_\alpha x_n$ den Faktor $\Pi(\alpha)$ fort und setzen

$$\Gamma_\alpha x_n = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+\alpha)}\, S^\alpha x_n,$$

[1]) F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen 1, Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 74—109; vgl. S. 83.

so daß an Stelle von $C_\alpha x_n \to x$ die Konvergenzbeziehung

$$\Gamma_\alpha x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha)} \qquad (\Gamma_{-k} x_n \to 0)$$

tritt. Nun folgt zwar diese stets aus $H^\alpha x_n \to x$; um aber den umgekehrten Schluß zu ziehen, muß man für $\alpha \leqq -1$ noch eine Zusatzforderung heranziehen, als welche sich die Existenz des Abelschen Grenzwerts

$$\lim_{t \to 1} (1-t) \sum_n x_n t^n = x$$

empfiehlt; für $\alpha \neq -k$ reicht schon die Beschränktheit von $(1-t)\sum_n x_n t^n$ für $0 \leqq t < 1$ aus. Dieser einfache Tatbestand wird in § 2 entwickelt, nachdem zwecks Abkürzung der Beweise in § 1 einige Ergebnisse meiner oben angeführten Arbeit zusammengestellt sind.

1. Wir betrachten die lineare Transformation

$$y_n = \sum_m a_{nm} x_m \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

wo je nach den Eigenschaften, die wir von den Folgen $X = (x_m)$ und $Y = (y_n)$ verlangen, die unendliche Matrix A entsprechende Bedingungen erfüllen muß. Soll insbesondere die Transformation oder Matrix *konvergenztreu* sein, d. h. jeder konvergenten Folge $x_m \to x$ eine konvergente Folge $y_n \to y$ zuordnen, so sind die folgenden, im wesentlichen von Herrn Toeplitz[2]) herrührenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$A_n = \sum_m |a_{nm}| \leqq \mathsf{A}, \tag{A}$$

$$\lim_n a_{nm} = a_m, \tag{B}$$

$$\lim_n \sum_m a_{nm} = a. \tag{C}$$

Es wird dann

$$y = a x + \sum_m a_m (x_m - x).$$

Wegen (A) führt eine konvergenztreue Matrix eo ipso jede beschränkte Folge X in eine beschränkte Y über. Soll die Matrix auch *nulltreu* sein, d. h. aus $x = 0$ stets $y = 0$ folgen, so müssen alle $a_m = 0$ sein; soll sie überdies *limestreu*, d. h. stets $y = x$ sein, so muß $a = 1$ ausfallen.

Es sei H die Matrix, die zur einfachen arithmetischen Mittelbildung

$$y_n = (x_0 + x_1 + \ldots + x_n) : (n+1) \tag{2}$$

---

[2]) O. Toeplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Matematyczno-Fizyczne 22 (1911), S. 113—119.

gehört, und $S(H)$ das System der mit H *vertauschbaren* Matrizen A. Jede solche Matrix A entsteht, wie ich a. a. O. bewiesen habe, aus einer „*Multiplikatorenfolge*“ (μ_n) vermöge

$$a_{nm} = \binom{n}{m} \Delta^{n-m} \mu_m,$$

wobei

$$\Delta^n \mu_m = \sum_{\alpha=0}^{n} (-1)^\alpha \binom{n}{\alpha} \mu_{m+\alpha} \tag{3}$$

die Differenzen aller Ordnungen von den μ_n bedeutet, und die Transformation (1) nimmt, in den Differenzen

$$\xi_n = \Delta^n x_0, \qquad \eta_n = \Delta^n y_0 \tag{4}$$

der x_n, y_n ausgedrückt, die einfach multiplikative Form

$$\eta_n = \mu_n \xi_n \tag{5}$$

an. Oder: bezeichnet P die feste Matrix mit den Elementen $p_{nm} = (-1)^m \binom{n}{m}$ und M eine willkürliche Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\mu_0, \mu_1, \ldots$, so ist

$$A = PMP^{-1} = PMP;$$

das System $S(H)$ ist mit dem System aller Diagonalmatrizen ähnlich, je zwei Matrizen A sind vertauschbar. Die Zeilensummen von A sind konstant,

$$\sum_m a_{nm} = \mu_0, \tag{6}$$

so daß eine konstante Folge $x_0 = x$ in eine konstante Folge $y_n = \mu_0 x$ übergeführt wird.

Wir betrachten im folgenden der Einfachheit wegen nur reelle Matrizen des Systems $S(H)$.

Eine *Folge* μ_n heißt *total monoton*, wenn alle Differenzen $\Delta^n \mu_m \geqq 0$. Damit A konvergenztreu sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Multiplikatorenfolge (μ_n) *Differenz von zwei total monotonen Folgen* sei, wobei die unter (B) (C) geforderten Grenzwerte von selbst existieren und zwar $a_1 = a_2 = \ldots = 0$, während $a_0 = \lim_n \Delta^n \mu_0 \neq 0$ sein kann, und wegen (6) $a = \mu_0$ ist. Die Matrix A ist nulltreu für $a_0 = 0$, limestreu für $\mu_0 = 1$. Ist A nulltreu, so können auch die genannten beiden total monotonen Folgen so gewählt werden, daß sie einzeln nulltreue Matrizen liefern.

Eine *Funktion* $\mu(t)$ heißt für $t > \tau$ *total monoton*, wenn sie für $t > \tau$ beliebig oft differentiierbar und $(-1)^n \mu^{(n)}(t) \geqq 0$ ist $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; sie heißt für $t \geqq \tau$ total monoton, wenn sie für $t > \tau$ total monoton und $\mu(\tau) \geqq \mu(\tau + 0)$ ist. Eine für $t \geqq 0$ total monotone Funktion $\mu(t)$ gibt eine total monotone Folge $\mu_n = \mu(n)$; umgekehrt aber gehört auch zu

jeder total monotonen Folge μ_n eine eindeutig bestimmte, für $t \geqq 0$ total monotone Funktion $\mu(t)$ mit $\mu_n = \mu(n)$. Hierbei ist $a_0 = \mu(0) - \mu(+0)$ und die entsprechende Matrix A also nulltreu, falls $\mu(t)$ bei $t = 0$ stetig ist.

Eine für $0 \leqq u \leqq 1$ monotone Funktion $\chi(u)$ (wobei $\chi(1) \geqq \chi(0) = 0$ sei) liefert in ihren *Momenten*

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \, d\chi(u) \tag{7}$$

eine total monotone Folge, in

$$\mu(t) = \int_0^1 u^t \, d\chi(u) \qquad (t \geqq 0)$$

die zugehörige total monotone Funktion, wobei

$$\mu(0) = \chi(1), \qquad \mu(0) - \mu(+0) = \chi(+0);$$

die entsprechende Matrix ist nulltreu, wenn $\chi(u)$ bei $u = 0$ stetig ist. Umgekehrt gehört zu jeder total monotonen Folge eine solche monotone Funktion $\chi(u)$, die wiederum eindeutig bestimmt ist (wenn man $\chi(0) = 0$ und für $0 < u < 1$ $\chi(u) = \frac{1}{2}\chi(u-0) + \frac{1}{2}\chi(u+0)$ fordert).

Der Matrix H in (2) entspricht die Multiplikatorenfolge $\mu_n = 1:(n+1)$. Die der Multiplikatorenfolge $\mu_n = (n+1)^{-\alpha}$ entsprechende Matrix H^α heißt die *Höldersche Matrix* der Ordnung α, für jedes reelle α; sie hat wegen $H^\alpha H^\beta = H^{\alpha+\beta}$ den Charakter einer Potenz. Wir definieren ferner für jedes reelle α die *Summenmatrix* S^α der Ordnung α durch[3])

$$S^\alpha x_n = x_n + \binom{\alpha}{1} x_{n-1} + \binom{\alpha+1}{2} x_{n-2} + \ldots + \binom{\alpha+n-1}{n} x_0; \tag{8}$$

auch hier ist $S^\alpha S^\beta = S^{\alpha+\beta}$. Ferner heißt die der Multiplikatorenfolge

$$\mu_n = 1 : \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Pi(n)\,\Pi(\alpha)}{\Pi(n+\alpha)}$$

für $\alpha \neq -k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ entsprechende Matrix C_α die *Cesàrosche Matrix* der Ordnung α; die zugehörige lineare Transformation lautet

$$y_n = C_\alpha x_n = S^\alpha x_n : \binom{n+\alpha}{n}.$$

Der Äquivalenzsatz für $\alpha > -1$ besagt, daß $C_\alpha : H^\alpha$ und $H^\alpha : C_\alpha$ limestreue Matrizen sind[4]).

---

[3]) Die Schreibweise $A x_n$ für die rechte Seite von (1), nach deren Muster die Bezeichnungen $S^\alpha x_n$, $C_\alpha x_n$, $H^\alpha x_n$ u. dgl. zu verstehen sind, ist nicht ganz korrekt, aber bequem und kaum mißverständlich.

[4]) Eine Matrix A mit lauter nichtverschwindenden Multiplikatoren μ_n hat die Reziproke A^{-1} mit den Multiplikatoren μ_n^{-1}. Ein Quotient $A^{-1}B$ BA^{-1} kann $\frac{B}{A}$ oder $B:A$ geschrieben werden.

2. Für $\alpha \leqq -1$ fallen erstens die Matrizen $C_{-1}, C_{-2}, \ldots$ als sinnlos fort, aber auch die übrigen C_α spielen, wie sich zeigen wird, eine andere Rolle als die H^α gleicher Ordnung. Beseitigen wir den Faktor $\Pi(\alpha)$, der durch seine Pole für $\alpha = -k$ den Wegfall von C_{-k} bewirkt, und betrachten die für jedes reelle α sinnvolle Multiplikatorenfolge

$$\mu_n = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+\alpha)}, \tag{9}$$

deren zugehörige Matrix Γ_α heiße und durch

$$\Gamma_\alpha x_n = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+\alpha)} S^\alpha x_n \tag{10}$$

erklärt ist; für $\alpha = -k$ ist $\mu_n = n(n-1)\ldots(n-k+1)$, also $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{k-1} = 0$, so daß Γ_{-k} keine Reziproke hat; für $\alpha \neq -k$ ist $C_\alpha = \Pi(\alpha)\Gamma_\alpha$. Eine konstante Folge $x_n = x$ geht in die konstante Folge $\Gamma_\alpha x_n = \frac{x}{\Pi(\alpha)}$ über, wobei $\frac{1}{\Pi(-k)} = 0$ zu setzen ist.

I. *Die Matrix $\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}$ ist nulltreu.*

Denn sie entspricht der Multiplikatorenfolge

$$\mu_n = \frac{\Pi(n)^2}{\Pi(n+\alpha)\Pi(n-\alpha)}.$$

Wegen

$$\frac{1}{\Pi(t)} = e^{Ct} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{k}\right) e^{-\frac{t}{k}}$$

ist

$$\mu(t) = \frac{\Pi(t)^2}{\Pi(t+\alpha)\Pi(t-\alpha)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{t+k}\right)^2\right]$$

in der t-Ebene bis auf die Doppelpole $t = -k$ regulär; da die Funktionen $(t+k)^{-2}$ und ihre Produkte sämtlich für $t > -1$ total monoton sind, so ergibt die Entwicklung von $\prod_{k=1}^{\infty}$ die Funktion $\mu(t)$ als Differenz von zwei für $t > -1$ total monotonen Funktionen. Die zu $\mu_n = \mu(n)$ gehörige Matrix ist konvergenztreu und wegen der Stetigkeit von $\mu(t)$ bei $t = 0$ nulltreu. Für $\alpha \neq \pm k$ ist $C_\alpha C_{-\alpha}$ limestreu.

II. *Die Matrix $H^{-\alpha}\Gamma_\alpha$ ist nulltreu. Mit $H^\alpha x_n$ ist also $\Gamma_\alpha x_n$ beschränkt; wenn $H^\alpha x_n \to x$, ist $\Gamma_\alpha x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha)}$.*

In der Tat ist für $\alpha > -1$ $H^{-\alpha} C_\alpha$ limestreu (eine Hälfte des Äquivalenzsatzes), $H^{-\alpha}\Gamma_\alpha$ nulltreu; aber auch $H^\alpha C_\alpha^{-1}$ limestreu (die andere Hälfte) oder $H^\alpha \Gamma_\alpha^{-1}$ nulltreu; dies mit der nulltreuen Matrix $\Gamma_\alpha \Gamma_{-\alpha}$ multipliziert ergibt $H^\alpha \Gamma_{-\alpha}$ als nulltreu (für $\alpha > -1$). Demnach ist $H^{-\alpha}\Gamma_\alpha$

sowohl für $\alpha > -1$ als für $\alpha < 1$, d. h. für alle α nulltreu. Daraus folgt die Erhaltung der Beschränktheit, ferner aus $H^{\alpha}(x_n - x) \to 0$: $\Gamma_{\alpha}(x_n - x) \to 0$, womit II bewiesen ist. Für $\alpha \neq -k$ ist $H^{-\alpha} C_{\alpha}$ limestreu.

Der Satz II ist für $\alpha \leqq -1$ nicht umkehrbar. Das ist für $\alpha = -k$ evident, da ja aus $\Gamma_{-k} x_n \to 0$ unmöglich die Relation $H^{-k} x_n \to x$ mit einem in der Voraussetzung nicht vorkommenden x folgen kann. Aber auch für nichtganzes $\alpha < -1$ braucht aus $C_{\alpha} x_n \to x$ nicht $H^{\alpha} x_n \to x$, oder für nichtganzes $\beta > 1$ aus $C_{-\beta} x_n \to x$ nicht $H^{-\beta} x_n \to x$ zu folgen. Ist z. B.

$$x_n = S^{\beta}(n+1)^{-\beta} = (n+1)^{-\beta} + \binom{\beta}{1} n^{-\beta} + \ldots + \binom{n+\beta-1}{n} 1^{-\beta},$$

so ist

$$C_{-\beta} x_n = \frac{1}{\binom{n-\beta}{n}} S^{-\beta} x_n = \frac{(n+1)^{-\beta}}{\binom{n-\beta}{n}} \to \Pi(-\beta),$$

während $x_n \geqq \binom{n+\beta-1}{n} \to \infty$, also nicht einmal $x_n \to \Pi(-\beta)$, geschweige denn $H^{-\beta} x_n \to \Pi(-\beta)$ ist.

Es muß also, um II umzukehren, noch eine Bedingung hinzukommen. Als eine solche (möglichst schwache) Zusatzbedingung empfiehlt sich die Existenz des Abelschen Grenzwerts

$$x_n \to x\,(A),$$

worunter bekanntlich Konvergenz der Potenzreihe

$$f(t) = \sum_n x_n t^n$$

für $|t| < 1$ und

$$(1-t) f(t) \to x$$

für $t \to 1 - 0$ verstanden wird; unter Umständen reicht schon die schwächere Forderung aus, daß $(1-t) f(t)$ für $0 \leqq t < 1$ *beschränkt* sei, was wir kurz so ausdrücken wollen: *x_n ist A-beschränkt.*

Über die Beziehung dieser Begriffe zu unserm System $S(H)$ gelten folgende Sätze.

III. *Ist B eine konvergenztreue Matrix des Systems $S(H)$, so ist mit x_n auch $B x_n$ A-beschränkt. Ist B limestreu, so ist mit $x_n \to x\,(A)$ auch $B x_n \to x\,(A)$.*

Mittels der Eulerschen Transformation

$$\tau = \frac{t}{1-t}, \qquad t = \frac{\tau}{1+\tau}$$

ergibt sich, daß die für $\Re \tau > -\frac{1}{2}$ reguläre Funktion

$$\varphi(\tau) = (1-t) f(t)$$

für $|\tau| < \frac{1}{2}$ durch

$$\varphi(\tau) = \sum_n (-1)^n \xi_n \tau^n$$

dargestellt wird, wo ξ_n die in (4) eingeführten Differenzen der x_n sind. Ein A-beschränktes x_n bedeutet, daß $\varphi(\tau)$ für $\tau \geqq 0$ beschränkt ist; $x_n \to x\,(A)$ bedeutet, daß $\varphi(\tau) \to x$ für $\tau \to +\infty$. Die konvergenztreue Matrix B, deren Multiplikatorenfolge wir unbeschadet der Allgemeinheit als total monoton, also als Momentfolge (7) einer monotonen Funktion $\chi(u)$ annehmen können, verwandelt $\varphi(\tau)$ in

$$\psi(\tau) = \sum_n (-1)^n \mu_n \xi_n \tau^n = \int_0^1 \varphi(\tau u)\, d\chi(u),$$

zunächst für $|\tau| < \frac{1}{2}$, aber vermöge analytischer Fortsetzung auch für $\Re\tau > -\frac{1}{2}$. Hieraus geht hervor: mit $\varphi(\tau)$ ist auch $\psi(\tau)$ für $\tau \geqq 0$ beschränkt. Ferner sei B nulltreu, also $\chi(+0) = 0$; dann folgt aus $\varphi(\tau) \to 0$ (für $\tau \to +\infty$) auch $\psi(\tau) \to 0$. Denn mit Einschiebung des Teilpunktes $u = \frac{\tau_0}{\tau}$ $(0 < \tau_0 < \tau)$ erhält man

$$|\psi(\tau)| \leqq M(\tau_0)\,\chi\left(\tfrac{\tau_0}{\tau}\right) + m(\tau_0)\,\chi(1),$$

wo $M(\tau_0)$, $m(\tau_0)$ die Maxima von $|\varphi(\tau)|$ für $0 \leqq \tau \leqq \tau_0$ resp. $\tau \geqq \tau_0$ bedeuten; hieraus folgt die Behauptung, wenn man erst τ und dann $\tau_0 \to \infty$ gehen läßt. Für nulltreues B folgt also aus $x_n \to 0\,(A)$ auch $Bx_n \to 0\,(A)$ oder aus $x_n - x \to 0\,(A)$ auch $B(x_n - x) \to 0\,(A)$; dies gibt für limestreues B die zweite Behauptung von III.

IV. *Es sei x_n (einseitig) beschränkt und $x_n \to x\,(A)$; dann haben (für $k = 1, 2, 3, \ldots$ und reelles α) auch $C_k^{-1} x_n$, $H^{-k} x_n$, $H^{\alpha} x_n$ den Abelschen Grenzwert x. Ist x_n beschränkt, so sind $C_k^{-1} x_n$, $H^{-k} x_n$, $H^{\alpha} x_n$ jedenfalls A-beschränkt.*

Eine für $|t| < 1$ konvergente Potenzreihe $f(t)$ mit *nichtnegativen* Koeffizienten gestattet bekanntlich[5]) den Schluß von $f(t) \sim x(1-t)^{-\alpha}$ (d. h. $(1-t)^{\alpha} f(t) \to x$ für $t \to 1-0$) auf

$$f'(t) \sim \alpha x (1-t)^{-\alpha-1}, \qquad f''(t) \sim \alpha(\alpha+1) x (1-t)^{-\alpha-2}, \ \ldots,$$

insbesondere von $f(t) \sim x(1-t)^{-1}$ auf $f^{(k)}(t) \sim k!\, x (1-t)^{-k-1}$, und dies letztere gilt auch für ein $f(t) = \sum_n x_n t^n$ mit einseitig beschränkten Koeffizienten (wenn etwa $x_n \geqq c$, so wende man den Schluß auf $f(t) - c(1-t)^{-1} = \sum_n (x_n - c) t^n$ an). Sei nun $x_n \to x\,(A)$, $f(t) \sim x(1-t)^{-1}$ und

$$y_n = C_k^{-1} x_n, \qquad g(t) = \sum_n y_n t^n,$$

[5]) E. Landau, Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie (Berlin 1916), S. 46.

so ist

$$x_n = C_k y_n = S^k y_n : \binom{n+k}{n},$$

$$(1-t)^{-k} g(t) = \sum_n S^k y_n \cdot t^n = \sum_n \binom{n+k}{n} x_n t^n$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} [t^k f(t)] \sim x (1-t)^{-k-1},$$

weil $t^k f(t) \sim x (1-t)^{-1}$. Es ist also $g(t) \sim x (1-t)^{-1}$, d. h. $y_n \to x\,(A)$ oder $C_k^{-1} x_n \to x\,(A)$ und, weil $C_k H^{-k}$ und (für $k > -\alpha$) $H^{k+\alpha}$ limestreu sind, nach III auch $H^{-k} x_n \to x\,(A)$, $H^{\alpha} x_n \to x\,(A)$.

Die zweite Hälfte von IV ist ganz trivial, denn aus $|x_n| \leqq M$ folgt für $0 \leqq t < 1$ mit den obigen Bezeichnungen

$$(1-t)^{-k} |g(t)| \leqq M \sum_n \binom{n+k}{n} t^n = M (1-t)^{-k-1},$$

also $(1-t) g(t)$ beschränkt, d. h. $C_k^{-1} x_n$ A-beschränkt und ebenso wieder für die beiden andern Matrizen. (Übrigens gilt die Behauptung auch, wenn x_n nur einseitig beschränkt und A-beschränkt ist.)

Wir können dem Satze II jetzt die folgende Form geben, in der sich seine Umkehrung ermöglichen läßt:

II*. *Ist $H^{\alpha} x_n$ beschränkt, so ist $\Gamma_{\alpha} x_n$ beschränkt und x_n A-beschränkt; ist $H^{\alpha} x_n \to x$, so ist $\Gamma_{\alpha} x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha)}$ und $x_n \to x\,(A)$.*

Die hinzugekommenen Behauptungen ergeben sich durch Anwendung von IV auf $z_n = H^{\alpha} x_n$; ist z_n beschränkt, so ist $H^{-\alpha} z_n = x_n$ A-beschränkt und ist $z_n \to x$, also auch $z_n \to x\,(A)$, so ist $H^{-\alpha} z_n \to x\,(A)$.

Wir werden nun die Umkehrung von II* durch Kombination der Schlüsse von α auf $\alpha + 1$ und von $\alpha + 1$ auf α beweisen.

V. *Ist x_n A-beschränkt, $\Gamma_{\alpha} x_n$ beschränkt, so ist auch $\Gamma_{\alpha+1} x_n$ beschränkt. Ist x_n A-beschränkt, $\Gamma_{\alpha} x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha)}$, so ist für $\alpha \neq -1$ auch $\Gamma_{\alpha+1} x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha+1)}$; für $\alpha = -1$ gilt: ist $x_n \to x\,(A)$, $\Gamma_{-1} x_n \to 0$, so ist $x_n \to x$.*

Wir unterscheiden die drei Fälle $\alpha \gtrless -1$. Ist $\alpha > -1$, so kann man von der Beschränktheit von $C_{\alpha} x_n$ auf die von $C_{\alpha+1} x_n$, von $C_{\alpha} x_n \to x$ auf $C_{\alpha+1} x_n \to x$ ohne weitere Voraussetzung schließen, da $C_{\alpha+1} : C_{\alpha}$ limestreu ist.

Für $\alpha < -1$ folgt aus der Beschränktheit von $\Gamma_{\alpha} x_n = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+\alpha)} S^{\alpha} x_n$, daß $S^{\alpha} x_n = O(n^{\alpha})$, $\sum_n S^{\alpha} x_n$ konvergiert, also

$$y_n = \sum_{m=0}^{n} S^{\alpha} x_m = S^{\alpha+1} x_n \to y.$$

Weiter ist $(1-t)\sum_n y_n t^n = (1-t)^{-\alpha-1}\cdot(1-t)f(t)$ und das konvergiert, wenn x_n A-beschränkt ist, für $t\to 1$ nach 0. Also $y_n \to 0\,(A)$, folglich $y=0$, also

$$S^{\alpha+1}x_n = -\sum_{\nu=n+1}^{\infty} S^\alpha x_\nu = O\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^\alpha\Big) = O(n^{\alpha+1}),$$

also $\Gamma_{\alpha+1}x_n$ beschränkt. Ebenso folgt aus $S^\alpha x_n = o(n^\alpha)$ auch $S^{\alpha+1}x_n = o(n^{\alpha+1})$, aus $\Gamma_\alpha x_n \to 0$ auch $\Gamma_{\alpha+1}x_n \to 0$ oder aus $\Gamma_\alpha(x_n - x)\to 0$ auch $\Gamma_{\alpha+1}(x_n-x)\to 0$, immer unter der bloßen Voraussetzung, daß x_n A-beschränkt sei.

Für $\alpha=-1$ ist $\Gamma_{-1}x_n = n(x_n - x_{n-1}) = nu_n$, wenn $x_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$ gesetzt wird, also

$$\varphi(t) = \sum_n u_n t^n = (1-t)f(t).$$

Unsere Behauptungen lauten also:

Ist $\varphi(t)$ beschränkt $(0\leqq t<1)$, nu_n beschränkt, so ist $x_n = Su_n$ beschränkt; ist $\lim_{t\to 1}\varphi(t) = x$, $nu_n\to 0$, so ist $\sum_n u_n = x$.

Die zweite ist der alte Taubersche Umkehrsatz[6]), die erste eine vergröberte Form davon; wir haben, wenn $v_n = Hn|u_n| = \sum_{\nu=0}^{n}\nu|u_\nu| : (n+1)$ und w_n die obere Grenze von $\nu|u_\nu|$ für $\nu > n$ bedeutet, für $0<t<1$

$$x_n = \varphi(t) + \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu(1-t^\nu) - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_\nu t^\nu,$$

$$|x_n| \leqq |\varphi(t)| + (1-t)(n+1)v_n + \frac{w_n}{(1-t)(n+1)},$$

$$|x_n| \leqq \Big|\varphi\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big| + v_n + w_n$$

und damit beide Behauptungen (die zweite für $x=0$, also allgemein).

Hiernach gelangen wir zu folgender Umkehrung von II*:

VI. *Ist $\Gamma_\alpha x_n$ beschränkt und x_n A-beschränkt, so ist $H^\alpha x_n$ beschränkt. Ist $\Gamma_\alpha x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha)}$ und $x_n \to x\,(A)$ (wobei aber für $\alpha \neq -k$ statt $x_n\to x\,(A)$ die bloße A-Beschränktheit von x_n genügt), so ist $H^\alpha x_n \to x$.*

Für $\alpha > -1$ ist dies richtig, auch ohne die Abelschen Zusatzforderungen, weil $C_\alpha^{-1}H^\alpha$ limestreu ist. Wir beweisen den Satz demgemäß durch den Schluß von $\alpha+1$ auf α $(\alpha\leqq -1)$ und benutzen dabei die aus der Multiplikatorengleichung

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+\alpha+1)}(n+1) = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+\alpha)} - \alpha\frac{\Pi(n)}{\Pi(n+\alpha+1)}$$

---

[6]) Bekanntlich braucht nu_n nur beschränkt (Littlewood) oder einseitig beschränkt (Hardy-Littlewood) zu sein; vgl. Satz VII.

folgende Matrizengleichung

$$(11)\quad \Gamma_{\alpha+1}H^{-1} = \Gamma_\alpha - \alpha\Gamma_{\alpha+1}, \qquad \Gamma_{\alpha+1}H^{-1}x_n = \Gamma_\alpha x_n - \alpha\Gamma_{\alpha+1}x_n.$$

Sei $\Gamma_\alpha x_n$ beschränkt, x_n A-beschränkt. Dann ist nach V (für alle α) $\Gamma_{\alpha+1}x_n$, $\Gamma_{\alpha+2}x_n$, ... beschränkt, wodurch wir einen Index β im Intervall $-1 < \beta \leqq 0$ erhalten, für den $\Gamma_\beta x_n$ beschränkt, also (C_β^{-1} limestreu) x_n beschränkt ist; nach IV ist $H^{-1}x_n$ A-beschränkt. Jetzt ist also nach (11) $\Gamma_{\alpha+1}H^{-1}x_n$ beschränkt, $H^{-1}x_n$ A-beschränkt; weil VI für $\alpha+1$ richtig sein sollte, ist $H^{\alpha+1}(H^{-1}x_n) = H^\alpha x_n$ beschränkt, die erste Hälfte von VI also auch für α richtig. — Ferner sei $\Gamma_\alpha x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha)}$, $x_n \to x\,(A)$. Nach V ist (wieder für alle α) $\Gamma_{\alpha+1}x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha+1)}$, $\Gamma_{\alpha+2}x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha+2)}$, ..., $\Gamma_\beta x_n \to \frac{x}{\Pi(\beta)}$ oder $C_\beta x_n \to x$ $(-1 < \beta \leqq 0)$, $x_n \to x$, nach IV $H^{-1}x_n \to x\,(A)$. Aus (11) folgt $\Gamma_{\alpha+1}H^{-1}x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha)} - \frac{\alpha x}{\Pi(\alpha+1)} = \frac{x}{\Pi(\alpha+1)}$, und daraus, weil VI für $\alpha+1$ als gültig angenommen war, $H^{\alpha+1}(H^{-1}x_n) = H^\alpha x_n \to x$, die Gültigkeit für α. Schließlich, wenn $\Gamma_\alpha x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha)}$, x_n nur A-beschränkt und $\alpha \neq -k$, so folgt nach V immer noch ($C_\alpha x_n \to x$) $C_{\alpha+1}x_n \to x$, $C_{\alpha+2}x_n \to x$, ..., $C_\beta x_n \to x$, $x_n \to x$, so daß auch $x_n \to x\,(A)$ ist. Damit ist VI bewiesen.

Das Ergebnis läßt sich so formulieren. Wir sagen, x_n ist (C,α)-beschränkt, wenn

$$C_\alpha x_n \text{ beschränkt} \qquad (\alpha > -1),$$

$$\Gamma_\alpha x_n \text{ beschränkt}, \quad x_n \; A\text{-beschränkt} \qquad (\alpha \leqq -1).$$

Wir sagen: $x_n \to x\,(C,\alpha)$, wenn

$$C_\alpha x_n \to x \qquad (\alpha > -1),$$

$$C_\alpha x_n \to x, \quad x_n \; A\text{-beschränkt} \qquad (\alpha < -1,\ \alpha \neq -k),$$

$$\Gamma_\alpha x_n \to 0, \quad x_n \to x\,(A) \qquad (\alpha = -k),$$

wo k eine natürliche Zahl ist. Dann ist für alle reellen α

x_n (C,α)-beschränkt soviel wie $H^\alpha x_n$ beschränkt,

$x_n \to x\,(C,\alpha)$ soviel wie $H^\alpha x_n \to x$.

In dieser Gestalt, mit den Abelschen Zusatzbedingungen, überträgt sich also der Äquivalenzsatz auf die Ordnungen $\alpha \leqq -1$.

Wir bemerken schließlich noch den folgenden Satz:

VII. *Ist* $H^\alpha x_n$ *beschränkt und* $x_n \to x\,(A)$, *so ist* $H^{\alpha+\varepsilon}x_n \to x$ *für* $\varepsilon > 0$.

Die Herren Hardy und Littlewood haben bewiesen[7]: wenn $n u_n$ beschränkt und die Reihe $\sum_n u_n$ A-summierbar ist, so ist sie $C_{-1+\varepsilon}$-summierbar. Oder mit $x_n = S u_n$: wenn $n(x_n - x_{n-1}) = \Gamma_{-1} x_n$ beschränkt und $x_n \to x\,(A)$, so ist $C_{-1+\varepsilon} x_n \to x$. Da mit $H^{-1} x_n$ nach II auch $\Gamma_{-1} x_n$ beschränkt und $C_{-1+\varepsilon}$ mit $H^{-1+\varepsilon}$ äquivalent ist, gilt VII für $\alpha = -1$. Der allgemeine Fall führt sich auf diesen speziellen zurück durch $y_n = H^{\alpha+1} x_n$. Es ist dann $H^{-1} y_n$ beschränkt, außerdem $y_n \to x\,(A)$ (nämlich für $\alpha + 1 > 0$ nach III mit $B = H^{\alpha+1}$; für $\alpha < 0$ ist mit $H^{\alpha} x_n$ auch x_n beschränkt und IV heranzuziehen); also ist $H^{-1+\varepsilon} y_n = H^{\alpha+\varepsilon} x_n \to x$.

Danach können wir V und VI ergänzen durch

VIII. *Ist $\Gamma_\alpha x_n$ beschränkt und $x_n \to x\,(A)$, so ist $\Gamma_{\alpha+\varepsilon} x_n \to \frac{x}{\Pi(\alpha+\varepsilon)}$ für $\varepsilon > 0$.*

Die drei Matrizenfolgen Γ_{-k}, Γ_k^{-1}, H^{-k} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ lassen sich übrigens linear mit ganzen rationalen Koeffizienten durch einander ausdrücken, wie aus den zugehörigen Multiplikatoren

$$n(n-1)\ldots(n-k+1), \quad (n+1)(n+2)\ldots(n+k), \quad (n+1)^k$$

hervorgeht; z. B. ist (E Einheitsmatrix)

$$\Gamma_{-k} = (H^{-1} - E)(H^{-1} - 2E)\ldots(H^{-1} - kE),$$
$$\Gamma_k^{-1} = H^{-1}(H^{-1} + E)\ldots(H^{-1} + (k-1)E).$$

---

[7]) J. E. Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **9** (1911), S. 434–448; G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Contributions to the arithmetic theory of series, ib. (2) **11** (1913), S. 411–478 (Theorem 37).

(Eingegangen am 31. Juli 1929.)

Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik*).

Von

Ernst Hölder in Leipzig.

Inhalt.

Seite

Einleitung 198
Erster Teil. Gleichgewichtsfiguren 203
I. Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten . 203
1. Zusammenstellung einiger Bezeichnungen 203
2. Die Problemstellung der Theorie der Gleichgewichtsfiguren . 204
3. Die linearen Relationen zwischen den Verzweigungsgleichungen 206
II. Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender homogener Flüssigkeiten mit nur einer Symmetrieebene 209
1. Die aus den Lagrangeschen Dreieckslösungen des Dreikörperproblems abgeleiteten Gleichgewichtsfiguren 209
2. Diskussion der Verzweigungsgleichungen 212
3. Eine Extremumseigenschaft der Lagrangeschen Dreieckslösungen 215
4. Herstellung schwach unsymmetrischer Gleichgewichtsfiguren auf anderem Wege 219
Zweiter Teil. Periodische Lösungen 225
III. Periodische Lösungen erster Art im Mehrkörperproblem 225
1. Problemstellung 225
2. Die linearen Integralidentitäten für die Lagrangeschen Ableitungen 230
3. Nullösungen und Greenscher Tensor 231
4. Existenzbeweis 235
5. Beispiel der drei inneren Jupitersatelliten 237
IV. Die Variationsbahn des Mondes 239
1. Die Hillschen Bewegungsgleichungen 239
2. Die Jacobischen Gleichungen 241
3. Heranziehung des adjungierten Systems 244
4. Existenz der Variationsbahn 247
V. Bestimmung des Greenschen Tensors 251

*) Diese Arbeit wurde der philosophischen Fakultät der Universität Leipzig als Habilitationsschrift vorgelegt.

Einleitung.

Die in dieser Arbeit mit der Methode der sukzessiven Approximationen behandelten Probleme der Himmelsmechanik besitzen die Eigenschaft, daß die Diskussion der dabei auftretenden Verzweigungsgleichungen — eine meist rechnerisch schwierige Aufgabe — auf Grund von allgemeineren Prinzipien geleistet werden kann, die, an sich aus der Mechanik wohl bekannt, nur in einer an die hier benutzte Methode angepaßten Weise zu interpretieren waren. Als gemeinsame Quelle dafür erweist sich die Betrachtung des zu dem jeweiligen Problem gehörigen Variationsprinzipes und seiner Invarianzeigenschaften.

Der erste Teil bringt eine Ergänzung zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren. Herr Lichtenstein[1] [2]) hat die Bestimmung von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeit in der Nachbarschaft einer bekannten Ausgangsfigur auf die Auflösung einer Integrodifferentialgleichung zurückgeführt, wie sie speziell von Ellipsoiden ausgehend erstmalig Liapounoff in seinen fundamentalen Untersuchungen der Gleichgewichtsfiguren aufgestellt hat. Dabei hat die zugehörige homogene lineare Integralgleichung stets triviale Nullösungen: wenn die Ausgangsfigur kein Rotationskörper ist, zwei linear unabhängige, sonst eine. Dies kommt von der Invarianz des zugehörigen Extremalintegrals gegenüber einer endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppe (im Lieschen Sinne): falls eine Flüssigkeitsmasse im relativen Gleichgewicht ist, so bleibt sie es, wenn man sie einer Translation längs der Rotationsachse oder einer Drehung um diese unterwirft. Die Diskussion der zu diesen Nullösungen gehörenden (trivialen) Verzweigungsgleichungen ist bisher in der Weise geführt worden, daß bei der Ausgangsfigur und manchmal auch bei den zu untersuchenden Nachbarfiguren das Vorhandensein einer Symmetrieebene senkrecht zur Rotationsachse sowie einer Symmetrieebene durch die Rotationsachse herangezogen wurde. Darin steckt,

[1]) L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. I. Abh. Allgemeine Existenzsätze. Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 229–284; **3** (1919), S. 172–174. II. Abh. Stabilitätsfragen. Math. Zeitschr. **7** (1920), S. 126–231. Dort findet sich die genaue Angabe der Abhandlungen von Liapounoff.

[2]) L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. I. Abh. Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes. Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 130–159. II. Abh. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 201–218. III. Abh. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper. Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 82 bis 118. IV. Abh. Zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 62–110. V. Abh. Neue Beiträge zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. Seeliger-Festschrift, S. 200–225 (Berlin 1925).

was die zweite die Rotationsachse enthaltende Symmetrieebene anlangt, eine besondere Voraussetzung, die, wie wir an einem Beispiel zeigen werden, nicht zuzutreffen braucht. Indem wir Symmetriebetrachtungen ganz beiseite lassen, bemerken wir im folgenden, daß gerade die Invarianz der Eigenschaft des relativen Gleichgewichts gegenüber der Gruppe der Verschiebungen längs der Achse und der Drehungen um die Achse identische lineare Relationen zwischen den linken Seiten der Verzweigungsgleichungen liefert und damit das identische Erfülltsein der trivialen Verzweigungsgleichungen, sobald nur die übrigen (nicht trivialen) Verzweigungsgleichungen befriedigt sind[3]).

Zugleich ergibt sich so die Möglichkeit, auch die Existenz von Gleichgewichtsfiguren, die keine Symmetrieebene durch die Rotationsachse besitzen (im folgenden kurz „unsymmetrische Gleichgewichtsfiguren" genannt), zu beweisen. Wenn es nämlich gelingt, in der Lagrangeschen Dreieckslösung des ebenen Dreikörperproblems (bei hinreichender Größe der Konfiguration, die wie ein starrer Körper um ihren Schwerpunkt genügend langsam rotieren soll) die Massenpunkte durch solche mit Flüssigkeit erfüllte Bereiche zu ersetzen, daß das ganze System im relativen Gleichgewicht ist, so wird, wie Herr Kähler[4]) bemerkt hat, diese Figur, wenn keine zwei der Flüssigkeitsmassen einander gleich sind, sicher keine Symmetrieebene durch die Rotationsachse besitzen. Wir werden übrigens nicht nur die Existenz solcher unsymmetrischen Gleichgewichtsfiguren beweisen, sondern darüber hinaus noch sehen, daß bei genügend kleinen Differenzen der Massen diese (dann schwach unsymmetrische) Gleichgewichtsfigur einer linearen Reihe angehört, ausgehend von einer aus drei getrennten gleichen Massen bestehenden Gleichgewichtsfigur, die sogar drei Symmetrieebenen durch die Rotationsachse besitzt (und eben auf Grund dieser Eigenschaft von Herrn Kähler sichergestellt werden konnte) und von der wir außerdem zeigen werden, daß sie regulär, d. h. nicht Verzweigungsfigur ist.

Die Untersuchung der speziellen aus den Lagrangeschen Dreieckslösungen hervorgehenden Gleichgewichtsfiguren gründen wir auf die Betrachtung einer von Herrn Herglotz in seiner Wintervorlesung 1926/27 über Himmelsmechanik angegebenen homogenen Lagrangeschen Funktion, die für die Lagrangeschen Konfigurationen einen stationären Wert annimmt. Um aus den Dreieckslösungen die entsprechenden Gleichgewichtsfiguren abzuleiten,

---

[3]) Vgl. meine Note: Beiträge zur mathematischen Theorie der Gestalt des Erdmondes, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 1926, S. 21–36, insbesondere S. 26.

[4]) E. Kähler, Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten. Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 220–237.

genügt es, die zur Dreieckskonfiguration gehörige Taylorsche Entwicklung dieser Lagrangeschen Funktion bis zu den Gliedern 2. Grades aufzustellen. Man erhält sie am besten, wenn man die Entwicklung in die Gestalt bringt, die der Mittelwertsatz meines Vaters für konvexe Funktionen[5]) liefert.

Weiter soll in dieser Arbeit die Herstellung von periodischen Lösungen der 1. Art (Sorte) (solutions de la première sorte in der Terminologie von Poincaré) im Drei- oder Mehrkörperproblem in der naheliegenden und übersichtlichen Form erfolgen, die durch Verwendung der Grundbegriffe aus der Theorie der Randwertaufgaben von nichtlinearen Differentialgleichungen ermöglicht wird. Es handelt sich zunächst um periodische Bewegungen der Massenpunkte in der Nähe des (integrablen) Grenzfalles, daß die Massen aller Massenpunkte außer einer verschwinden; um diese führen die Nullmassen auf konzentrischen Kreisen eine „periodische" Bewegung aus, d. h. nach Ablauf einer Periode nimmt das System wieder die alte Konfiguration an, es hat sich nur als Ganzes um einen gewissen Winkel gedreht. In dem zu untersuchenden Fall nicht verschwindender Massen hängt das mechanische System noch von einem (klein zu haltenden) Massenparameter μ ab.

Poincaré[6]) hat als erster die Existenz solcher periodischen Lösungen bewiesen, indem er die allgemeine Lösung des zugehörigen (kanonischen) Differentialgleichungssystems als Funktion der Anfangswerte untersucht und diese Parameter so bestimmt, daß die Lösung periodisch wird. In anderer Weise findet sich dies durchgeführt in dem bekannten Buch von Moulton[7]), wobei von den Lagrangeschen Differentialgleichungen des Bewegungsproblems ausgegangen und von geeigneten Polarkoordinaten Gebrauch gemacht wird. Unser eben charakterisiertes Problem ist insbesondere in dem von F. L. Griffin[7a]) herrührenden Artikel behandelt.

Eine andere weitertragende und der Praxis näherstehende Methode ist die von Herrn Wintner[8]) entwickelte Methode der unendlich vielen Veränderlichen.

Demgegenüber wenden wir hier die Methode der sukzessiven Approximationen an, nach dem Vorbild, das Herr Lichtenstein in seinen Untersuchungen zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe[9]) gegeben hat. Dies

[5]) O. Hölder, Ueber einen Mittelwerthssatz, Göttinger Nachrichten 1889, S. 38–47, insbes. S. 42.

[6]) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I (Paris 1892).

[7]) F. R. Moulton, Periodic orbits (Washington 1920).

[7a]) F. L. Griffin, Certain periodic orbits of k finite bodies revolving about a relatively large central mass, American M. S. Trans. **9** (1908), S. 1–33; bei F. R. Moulton, loc. cit. [7]), S. 425–456.

[8]) A. Wintner, Über die Differentialgleichungen der Himmelsmechanik, Math. Annalen **96** (1926), S. 284–312.

[9]) L. Lichtenstein, loc. cit. [2]) Abh. IV und V.

geschieht in der einfachsten Weise durch Einführung des zur Randbedingung der Periodizität gehörigen Greenschen Tensors der „Jacobischen" Differentialgleichungen unseres mechanischen Systems, dessen Koordinaten die kartesischen Koordinaten der einzelnen Massenpunkte in geeignet bewegten Achsenkreuzen sind. Da das zugehörige homogene lineare System (die Variationsgleichungen) periodische Nullösungen besitzt, handelt es sich um den Greenschen Tensor im erweiterten Sinne, mit dessen Hilfe sich Integrodifferentialgleichungen ergeben, in die noch gewisse zunächst unbekannte Parameter eingehen. Damit die durch sukzessive Approximationen erhaltenen Lösungen dieses Integrodifferentialgleichungssystems, die gewiß der Randbedingung der Periodizität genügen, auch Lösungen der Bewegungsgleichungen sind, müssen die genannten Parameter Verzweigungsgleichungen befriedigen, deren Diskussion den Hauptpunkt der Untersuchung bildet und in jedem konkreten Fall besondere Betrachtungen erfordert. Zwischen den Verzweigungsgleichungen, welche sich übrigens als Bedingungen für das Stationärwerden der als Funktion der Parameter aufgefaßten Hamiltonschen Wirkung (längs der Lösungen des Integrodifferentialgleichungssystems) interpretieren lassen, bestehen wieder lineare Relationen, die sich ohne weiteres ergeben, wenn man, wie dies Herr Herglotz bei der Herleitung der entsprechenden „Integrale" der Bewegungsgleichungen tut[10]), direkt an das Variationsprinzip und seine Invarianzeigenschaften anknüpft. Man erhält so lineare Integralidentitäten für die Lagrangeschen Ableitungen, d. h. gewisse lineare Kombinationen der Lagrangeschen Ableitungen geben ein verschwindendes Zeitintegral, erstreckt über die Periode einer beliebigen periodischen Bewegung, die durchaus nicht den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zu genügen braucht. Für die Lösungen unseres Integrodifferentialgleichungssystems reduzieren sich nun die Lagrangeschen Ableitungen zwar vielleicht nicht auf Null, aber doch sicher auf eine lineare Kombination aus den periodischen Nullösungen mit Koeffizienten, die gerade die linken Seiten der Verzweigungsgleichungen sind. Zwischen diesen linken Seiten der Verzweigungsgleichungen ergeben sich so die linearen Identitäten.

Auf den Fall kommensurabler mittlerer Bewegungen konnte in dieser Arbeit nicht eingegangen werden. Dagegen wurde, um wenigstens in einem

---

[10]) Vgl. G. Herglotz, Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. (4) **36** (1911), S. 493–533, bes. § 9, S. 511; vor allem aber in seinen Vorlesungen, denen ich mehr, als sich im einzelnen sagen läßt, die Auffassung der „formalen" Zusammenhänge bei den hier behandelten Fragen verdanke. — Bei allgemeineren invarianten Variationsproblemen wären die Sätze von Frl. E. Noether (Invariante Variationsprobleme, Gött. Nachr. 1918, S. 235–257) zur Diskussion der Verzweigungsgleichungen zu benutzen, die den durch die Transformationsgruppe bedingten Nullösungen entsprechen.

Beispiel die Verzweigungsgleichungen näher zu untersuchen, die periodische Bewegung behandelt, die der von den drei inneren Jupitersatelliten[11]) ausgeführten entspricht. Hier haben wir — auch wenn wir Kommensurabilitäten ausschließen — stets drei periodische Nullösungen, von denen vermöge der dem Energie- und Flächensatz entsprechenden Identitäten nur zwei eliminiert werden können, so daß immer eine nichttriviale Nullösung verbleibt. Die Diskussion der Verzweigungsgleichungen erfolgt in zwei Schritten, indem zunächst durch spezielle Annahmen Bahnen erhalten werden können, die sich durch ihre Symmetrieeigenschaften als Lösungen der Bewegungsgleichungen ausweisen, und dann hinterher durch eine Vollständigkeitsbetrachtung, wie sie ähnlich Herr Lichtenstein[12]) einmal angewandt hat, gezeigt wird, daß die so erhaltenen Lösungen die einzigen sind, wenigstens, wenn wir uns auf Lösungen mit gleichzeitigen Konjunktionen aller drei Satelliten beschränken, also gerade auf die periodischen Lösungen, die den tatsächlichen Verhältnissen bei den drei inneren Jupitersatelliten entsprechen.

Als andersgeartete, manches Neue bietende Anwendung der Methode der Integrodifferentialgleichungen mit einem Greenschen Tensor und der sukzessiven Approximationen behandeln wir ausführlich die Hillsche Variationsbahn für Monde, bei denen der Periodenquotient m (synodische Mondperiode durch siderische Sonnenperiode) genügend klein ist, absichtlich in möglichstem Anschluß an den Gang der Hillschen Darstellung[13]) und mit der Tendenz, diese fundamentalen Untersuchungen, die vor 50 Jahren von Hill angestellt worden sind und in letzter Zeit durch A. Wintner[14]) eine mathematische Begründung erhalten haben, von einer neuen Seite zu beleuchten. Auch das darf vielleicht zur Rechtfertigung unserer Behandlungsweise erwähnt werden, daß für die Ermittlung der sog. absoluten Störungen gerade Hill[14a]) die Methode betont hat, die gestattet, diese Störungen durch sukzessive Quadraturen zu berechnen. Das ist die Methode, die wir hier angepaßt haben an das (Randwert-) Problem der Aufsuchung einer (perio-

[11]) Vgl. die Bemerkung bei Poincaré, loc. cit. [6]) S. 154—156. Auch bei F. R. Moulton, loc. cit. [7]) S. 452ff. von F. L. Griffin mit den oben genannten Methoden behandelt. Wegen der ausgedehnten Theorie der Jupitersatelliten vgl. F. Tisserand, Traité de mécanique céleste IV (Paris 1896).

[12]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) II, S. 179, 220.

[13]) G. W. Hill, Researches in the lunar theory, Coll. Math. Works **1** (Washington 1905), S. 284—335.

[14]) A. Wintner, I. Zur Hillschen Theorie der Variation des Mondes, Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 259—265; II. Über die Existenz der Hillschen Mondbahn of maximum lunation und der Poincaréschen Schlingbahnen, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 430—450; III. Über die Konvergenzfragen der Mondtheorie, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 211—227.

[14a]) G. W. Hill, A method of computing absolute perturbations, loc. cit. [13]) S. 151—165.

dischen) intermediären Mondbahn. Außer den Bahnen der Hillschen Schar gibt es keine weiteren Bahnen in einer gewissen, genügend engen Nachbarschaft der zu $m = 0$ gehörigen Kreise, insbesondere keine, welche die von Hill vorausgesetzten Symmetrien nicht besäßen.

Erster Teil. Gleichgewichtsfiguren.

I. Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

I 1. Zusammenstellung einiger Bezeichnungen.

Im Raume der kartesischen Koordinaten x, y, z sei eine Anzahl getrennter beschränkter Gebiete T^ν $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$, deren Gesamtheit mit T bezeichnet werden soll, gegeben. Die Begrenzung S^ν von T^ν bestehe aus einer einzigen doppelpunktlosen geschlossenen Fläche, die etwa stetig gekrümmt sein soll[15]). Die Gesamtheit aller Randkomponenten von T heißt S. Dieser Raum T mit einer Flüssigkeit der Dichte f angefüllt, deren Wert innerhalb eines Gebietes T^ν konstant $(= f_\nu)$ ist, von Gebiet zu Gebiet aber wechseln kann, besitzt das Newtonsche Potential

$$(1) \qquad \varkappa V(x, y, z) = \varkappa \int_T \frac{f' \, d\tau'}{D}, \qquad D^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

hier ist $d\tau'$ das Volumenelement, f' die Dichte im Integrationspunkt (x', y', z'), $\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante.

Es sei weiter T_1 ein Körper, dessen Begrenzung S_1 aus einer endlichen Anzahl geschlossener doppelpunktloser Flächen mit stetiger Normale besteht, die einander nicht berühren und den einzelnen Komponenten von S umkehrbar eindeutig so zugeordnet werden können, daß einem Punkt σ mit den Koordinaten X, Y, Z auf S der Punkt X_1, Y_1, Z_1 von S_1 entspricht, der auf der Flächennormale von S in σ liegt. Der Einheitsvektor dieser nach außen positiv gezählten Flächennormale (ν) ist (a, b, c); die Länge des Normalenstückes zwischen S und S_1, also der Abstand des Punktes X_1, Y_1, Z_1 von S heißt $\zeta = \zeta(\sigma)$. Alle auf T_1 oder S_1 bezüglichen Größen tragen im folgenden den Index 1; T_1^ν sei mit derselben (konstanten) Dichte angefüllt wie das entsprechende T^ν. Das Newtonsche Potential von T_1 ist $\varkappa V_1(x, y, z)$.

Für den Fall, daß S_1 in einer genügend nahen Nachbarschaft 1. Ordnung von S liegt, hat nun Herr Lichtenstein[16]) folgenden Ausdruck für

---

[15]) Wenn T eine Gleichgewichtsfigur ist, kann man dann auf S Gaußsche Parameter so wählen, daß die Koordinaten stetige Ableitungen aller Ordnungen besitzen. Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) I, S. 276.

[16]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) I, S. 239.

das Potential gegeben:

$$(2)\quad V_1(X_1\,Y_1\,Z_1)-V(X\,Y\,Z)=\int_0^1 dt\int_{S_t}\frac{1}{\varrho_t}f'\cdot(\zeta'\cos\varphi_t'-\zeta\cos\theta_t')\,d\sigma_t'\equiv\int_0^1 J_t\,dt.$$

Hier wird neben den Flächen S und S_1 die ganze einparametrige Flächenschar $S_t=S+t(S_1-S)$, $0\leqq t\leqq 1$ betrachtet. Dem Punkte $\sigma(X\,Y\,Z)$ auf S entspricht auf S_t der Punkt $\sigma_t(X+a\,t\,\zeta\quad Y+b\,t\,\zeta\quad Z+c\,t\,\zeta)$; $d\sigma_t'$ ist das Flächenelement von S_t im Integrationspunkt σ_t' und ϱ_t die Entfernung der Punkte σ_t und σ_t':

$$(3)\quad \varrho_t^2=\varrho^2+2t\sum(X'-X)(a'\zeta'-a\zeta)+t^2\sum(a'\zeta'-a\zeta)^2,\quad \varrho^2=\sum(X'-X)^2.$$

Das Summenzeichen bezieht sich dabei auf die drei Koordinaten $x,\,y,\,z$; $(a_t',\,b_t',\,c_t')$ ist der Einheitsvektor der (Außen-) Normale zu S_t in σ_t'; sein Winkel mit der Normale zu S in σ' bzw. in σ sei φ_t' bzw. θ_t':

$$(4)\qquad \cos\varphi_t'=a'\,a_t'+b'\,b_t'+c'\,c_t',\qquad \cos\theta_t'=a\,a_t'+b\,b_t'+c\,c_t'.$$

Aus der obigen Integraldarstellung (2) ergibt sich die fundamentale Entwicklung

$$(5)\qquad V_1(X_1\,Y_1\,Z_1)-V(X\,Y\,Z)=U^{(1)}+(U^{(2)}+U^{(3)}+\ldots)$$

mit

$$(6)\qquad U^{(1)}=\frac{\partial}{\partial\nu}V(X\,Y\,Z)\cdot\zeta+\int_S\frac{1}{\varrho}f'\,\zeta'\,d\sigma'$$

und allgemein

$$(7)\quad U^{(n)}=\int_S\frac{1}{\varrho^n}K^{(n)}f'\,d\sigma',\qquad \frac{1}{\varrho^n}K^{(n)}=\frac{1}{n!}\sum(a'\zeta'-a\zeta)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a_t'}{\varrho_t}\frac{d\sigma_t'}{d\sigma'}\right)\right]_{t=0}.$$

I 2. Die Problemstellung der Theorie der Gleichgewichtsfiguren.

Es wird verlangt, T_1 so zu bestimmen, daß die Flüssigkeitsmasse eine zur Winkelgeschwindigkeit ω_1 gehörige Gleichgewichtsfigur wird, d. h. unter dem Einfluß der aus dem Potential $\varkappa V_1$ abgeleiteten Newtonschen Gravitationskräfte zwischen den einzelnen Teilchen in dem $x\,y\,z$-System in Ruhe bleibt, falls dieses mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um seine z-Achse gleichförmig rotiert. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das so charakterisierte relative Gleichgewicht ist, daß das Relativpotential

$$(8)\qquad F_1(x\,y\,z)=fV_1(x\,y\,z)+\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}f\cdot(x^2+y^2)$$

auf jeder Komponente von S_1 sich auf eine Konstante reduziert, d. h.

$$(9)\qquad F_1(X_1\,Y_1\,Z_1)=C_1,$$

wo C_1 also eine „komponentenweise konstante Funktion" auf S_1 ist.

Wirklich bestimmt können auf Grund dieser Gleichung die Gleichgewichtsfiguren werden, die in einer hinreichend nahen Nachbarschaft 1. Ordnung einer bereits bekannten Gleichgewichtsfigur T liegen derart, daß S_1 auf S so bezogen werden kann, wie im § 1 angegeben, oder auch in genügender Nähe eines Körpers T, der zwar selbst keine Gleichgewichtsfigur ist, auf dessen Oberfläche sich aber sein Relativpotential nur wenig von einer komponentenweise konstanten Funktion unterscheidet[17]); dieser zweite Fall wird aber erst in II § 1 eine Rolle spielen.

Nehmen wir als Bezugskörper T eine Gleichgewichtsfigur, die zu dem Wert ω der Winkelgeschwindigkeit gehört; wir setzen voraus, daß die Schwerkraft ψ von T auf S, d. h. die Normalableitung $\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial \nu} F(XYZ)$ überall < 0 ist. Wir wollen untersuchen, ob es für hinreichend kleine Werte des Parameters

$$\lambda = \frac{1}{2\varkappa}(\omega_1^2 - \omega^2) \tag{10}$$

in der Umgebung des Körpers T weitere Figuren T_1 des relativen Gleichgewichts gibt, die eine lineare Reihe bilden, d. h. die Randkomponenten von S_1 sollen für $\lambda \to 0$ $(\omega_1 \to \omega)$ gegen die ihnen zugeordneten Komponenten von S konvergieren. Neben λ gehen als weitere Parameter, von denen T_1 abhängt, die Werte der komponentenweise konstanten Funktion

$$s = C_1 - C \tag{11}$$

ein, wo C die komponentenweise konstante Funktion ist, auf die sich das zu T gehörige Relativpotential $F(xyz) = fV(xyz) + \frac{\omega^2}{2\varkappa} f \cdot (x^2 + y^2)$ auf S reduziert. C_1 ist dabei als Funktion auf S aufzufassen. s wird nachträglich etwa durch die Forderung bestimmt, daß die Volumina entsprechender Massen von T und T_1 übereinstimmen.

Aus der Entwicklung (5) bekommt man jetzt sofort (übrigens für einen beliebigen Körper T_1 in einer genügenden Nachbarschaft 1. Ordnung der Gleichgewichtsfigur T und für eine beliebige komponentenweise konstante Funktion $C_1 = C + s$ mit absolut genügend kleinen s-Werten) die Entwicklung von $F_1(X_1 Y_1 Z_1) - C_1 = F_1(X_1 Y_1 Z_1) - F(XYZ) - s$:

$$F_1(X_1 Y_1 Z_1) - C_1 \equiv L(\zeta) - H(s, \lambda; \zeta) \tag{12}$$

mit

$$L(\zeta) = g\zeta + \int_S K\zeta' \, d\sigma', \qquad g = \psi f, \qquad K = \frac{f f'}{\varrho} \tag{13}$$

---

[17]) Vgl. insbesondere L. Lichtenstein, loc. cit. [2]).

und

$$(14)\quad \begin{aligned} \Pi(s,\lambda;\zeta) = s - \lambda f\cdot(X^2+Y^2) - 2\lambda f\cdot(Xa+Yb)\zeta - \frac{\omega^2}{2\varkappa} f\cdot(a^2+b^2)\zeta^2 \\ - \lambda f\cdot(a^2+b^2)\zeta^2 - f\cdot(U^{(2)}+U^{(3)}+\ldots), \end{aligned}$$

was wir auch schlechthin mit L und Π bezeichnen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung (9), daß T_1 eine zur Winkelgeschwindigkeit ω_1 gehörige Gleichgewichtsfigur sei, drückt sich auf Grund dieser Entwicklung dadurch aus, daß für ζ die fundamentale Integrodifferentialgleichung

$$(15)\qquad L(\zeta) = \Pi(s,\lambda;\zeta)$$

mit einer komponentenweise konstanten Funktion s besteht[18]).

13. Die linearen Relationen zwischen den Verzweigungsgleichungen.

Die zu (15) gehörige homogene lineare Integralgleichung

$$(15_0)\qquad L(u) = 0$$

hat stets triviale Nullösungen, nämlich $u_1 = \text{konst.}\cdot c$ und, falls T nicht Rotationssymmetrie um die z-Achse besitzt, $u_2 = \text{konst.}\cdot\gamma$, $\gamma = Xb - Ya$; diese Nullösungen entspringen der Eigenschaft jeder Gleichgewichtsfigur, bei einer Translation längs der Rotationsachse sowie bei einer Drehung um diese wieder in eine Gleichgewichtsfigur überzugehen[18a]).

Besitzt T Rotationssymmetrie um die z-Achse, so kommen u_2 sowie alle im folgenden einzuführenden darauf bezüglichen Größen einfach in Wegfall.

Gibt es außer den genannten beiden Nullösungen keine weiteren, so liegt der reguläre Fall vor; im singulären (sog. Verzweigungs-) Fall hat $L(u) = 0$ noch weitere Nullösungen, insgesamt: $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Zunächst lassen wir die Anzahl der Nullösungen ganz offen. Jedenfalls sei aber

$$-\int_S g\, u_\alpha u_\beta\, d\sigma = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases} \qquad (\alpha,\beta = 1,\ldots,m).$$

Um (15) auflösen zu können, geht man bekanntlich[18b]) aus von der durch die Schmidtsche Kernzerspaltung

$$(16)\qquad K = \sum_{\alpha=1}^{m} g\, g'\, u_\alpha\, u'_\alpha + N_*$$

unter Einführung von

$$(17)\qquad r_\alpha = -\int_S g'\, u'_\alpha\, \zeta'\, d\sigma'$$

---

[18]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) I, S. 248.

[18a]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) I, S. 249.

[18b]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) I, S. 263.

entstehenden Integrodifferentialgleichung

$$L_*(\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{m} r_\alpha \cdot g\, u_\alpha + \Pi(s, \lambda; \zeta) \tag{18}$$

mit

$$L_*(\zeta) \equiv g\,\zeta + \int_S N_*\, \zeta'\, d\sigma'. \tag{18'}$$

Diese Gleichung (18) kann, da jetzt $L_*(u) = 0$ keine Lösungen mehr besitzt, für hinreichend kleine Beträge von s, λ und der zunächst als unbestimmte Parameter aufzufassenden r_α durch sukzessive Approximationen stets eindeutig aufgelöst werden; die Lösung $\zeta = \zeta(\sigma)$ ist noch von den Parametern $s, \lambda; r_\alpha$ abhängig und läßt sich in eine Potenzreihe nach diesen Parametern entwickeln[19]). Der zu ζ gehörige Körper heiße jetzt T_1 im Sinne der Betrachtungen von § 1 und der Entwicklung (12); alle auf T_1 bezüglichen Größen tragen den Index 1. Es ist für dieses ζ wegen (13), (16), (18')

$$L - \Pi = \sum_{\alpha=1}^{m} g\, u_\alpha \int_S g'\, u'_\alpha\, \zeta'\, d\sigma' + L_* - \Pi,$$

also wegen (18)

$$L - \Pi = \sum_{\alpha} g\, u_\alpha \Big(\int_S g'\, u'_\alpha\, \zeta'\, d\sigma' + r_\alpha \Big). \tag{19}$$

Damit ζ auch der ursprünglichen fundamentalen Integrodifferentialgleichung (15) genügt, d. h. T_1 eine Gleichgewichtsfigur ist, müssen wegen der linearen Unabhängigkeit der Nullösungen u_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ die Parameter r_α nachträglich als Funktionen von s, λ so bestimmt werden, daß sie zusammen mit s, λ den „Verzweigungsgleichungen“

$$r_\alpha + \int_S g'\, u'_\alpha\, \zeta'\, d\sigma' = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{20}$$

genügen, in die für ζ die genannte Potenzentwicklung nach $s, \lambda; r_\alpha$ einzutragen ist.

Für die linken Seiten dieser Verzweigungsgleichungen erhält man aus (19) durch Multiplikation mit u_α und Integration wegen der Normierung und Orthogonalität der u_α und wegen $\int L(\zeta)\, u_\alpha\, d\sigma = \int L(u_\alpha)\, \zeta\, d\sigma = 0$ die Ausdrücke

$$r_\alpha + \int_S g'\, u'_\alpha\, \zeta'\, d\sigma' = \int_S \Pi\, u_\alpha\, d\sigma \equiv \Pi_\alpha. \tag{21}$$

Für (19) können wir jetzt schreiben

$$L - \Pi = g \sum_{\alpha} \Pi_\alpha\, u_\alpha. \tag{22}$$

---

[19]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) II, S. 167 f.

Nun war $L - \Pi$ die Entwicklung von $F_1(X_1 Y_1 Z_1) - C_1$ und zwar, wie oben ausdrücklich hervorgehoben worden ist, auch für einen Körper T_1 (in einer hinreichenden Nachbarschaft 1. Ordnung von T), der keine Gleichgewichtsfigur ist, und für beliebiges komponentenweise konstantes $C_1 = C + s$ (mit hinreichend kleinem $|s|$). Wir erhalten also die Formel

$$F_1(X_1 Y_1 Z_1) - C_1 = g \sum_\alpha \Pi_\alpha u_\alpha, \tag{23}$$

aus der sich, wie wir jetzt sehen werden, lineare Relationen zwischen den linken Seiten Π_α der Verzweigungsgleichungen ergeben.

Multiplizieren wir nämlich (23) mit c_1 bzw. mit $\gamma_1 = X_1 b_1 - Y_1 a_1$ und integrieren wir über S_1, so können wir das Oberflächenintegral links nach dem Gaußschen Satz in ein Volumintegral über T_1 verwandeln, von dem man sofort sieht, daß es verschwindet, da der resultierende Vektor und das resultierende Moment der (inneren) Newtonschen Gravitationskräfte Null sind. Wir bekommen also die beiden Identitäten in s, λ, r_α

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_\alpha \int g u_\alpha c_1 \, d\sigma_1 \cdot \Pi_\alpha, \\ 0 &= \sum_\alpha \int g u_\alpha \gamma_1 \, d\sigma_1 \cdot \Pi_\alpha. \end{aligned} \tag{24}$$

Nun konvergiert für $s, \lambda, r_\alpha \to 0$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} \int g c_1 u_1 \, d\sigma_1 & \int g c_1 u_2 \, d\sigma_1 \\ \int g \gamma_1 u_1 \, d\sigma_1 & \int g \gamma_1 u_2 \, d\sigma_1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \int g c u_1 \, d\sigma & \int g c u_2 \, d\sigma \\ \int g \gamma u_1 \, d\sigma & \int g \gamma u_2 \, d\sigma \end{vmatrix}, \tag{25}$$

und dies ist, falls T keine Rotationssymmetrie um die z-Achse besitzt, $\neq 0$ (schon wegen der linearen Unabhängigkeit von $\sqrt{-g}\, c$ und $\sqrt{-g}\, \gamma$). Somit lassen sich Π_1 und Π_2 durch die übrigen Π_α ($\alpha = 3, \ldots, m$) linear ausdrücken.

Besitzt T Rotationssymmetrie um die z-Achse, so ist $\gamma = 0$, aber es ist auch nur eine triviale Nullösung u_1 und damit nur eine triviale Verzweigungsgleichung $\Pi_1 = 0$ vorhanden; es genügt dann schon, aus der ersten Identität (24) vermöge $\int g c u_1 \, d\sigma \neq 0$ den Ausdruck Π_1 durch die übrigen Π_α ($\alpha = 2, \ldots, m$) linear darzustellen.

In beiden Fällen sehen wir also, daß wir uns um die trivialen Verzweigungsgleichungen gar nicht zu kümmern brauchen. Wir können r_1 und, falls T kein Rotationskörper ist, r_2 beliebige, nur hinreichend kleine Werte erteilen, insbesondere die Werte $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ [20]). Wenn man dann die nichttrivialen Verzweigungsgleichungen $\Pi_\alpha = 0$ nach den nichttrivialen Parametern r_α reell auflösen kann, ist man sicher, daß die trivialen Verzweigungs-

[20]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) I, S. 250.

gleichungen $\Pi_1 = 0$ und gegebenenfalls $\Pi_2 = 0$ schon von selbst erfüllt sind (identisch in $s, \lambda, r_1 (r_2)$).

Liegt insbesondere der reguläre Fall vor, so folgt durch die gleichen Betrachtungen aus den dann in Π_1, Π_2 homogenen Gleichungen (24), daß $\Pi_1 = 0$ und gegebenenfalls $\Pi_2 = 0$ identisch in $s, \lambda, r_1 (r_2)$ erfüllt sind. Hier ist also der Existenzbeweis für Nachbarfiguren allgemein erbracht[21]).

Noch besseren Einblick in die hier geltenden Zusammenhänge gewinnt man, wenn man das Variationsprinzip heranzieht, das die Gleichgewichtsfiguren liefert. Sei χ eine Ortsfunktion auf S_1 (mit stetigen ersten Ableitungen), die aber durch Verpflanzung nach den zugeordneten („darunterliegenden") Punkten von S auch als Ortsfunktion auf S aufgefaßt wird. Dann ist

$$\int_{S_1} (F_1 (X_1 Y_1 Z_1) - C_1) \chi \, d\sigma_1 = \delta_\chi \Lambda_1 - C_1 \cdot \delta_\chi \mathsf{T}_1, \tag{26}$$

wo wir mit Λ_1 und T_1 „Lagrangesche Funktion" und Volumen von T_1 bezeichnen:

$$\Lambda_1 = \mathfrak{U}_1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2}{\varkappa} \mathsf{J}_1,$$

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{1}{2} \int_{T_1} \int_{T_1} \frac{f \, d\tau \cdot f' \, d\tau'}{D}, \qquad \mathsf{J}_1 = \int_{T_1} f \cdot (x^2 + y^2) \, d\tau, \qquad \mathsf{T}_1 = \int_{T_1} d\tau. \tag{27}$$

Unter dem Symbol δ_χ verstehen wir hier die zur Abänderung χ gehörige Variation, die wie bei Herrn Lichtenstein[22]) als Ableitung nach t in der Flächenschar $(X_1 + a_1 \chi t \quad Y_1 + b_1 \chi t \quad Z_1 + c_1 \chi t)$ definiert ist; ω_1 wird festgehalten. Aus (23), (26) ergibt sich schließlich

$$\delta_\chi \Lambda_1 - C_1 \cdot \delta_\chi \mathsf{T}_1 = \sum_\alpha \int_S g u_\alpha \chi \, d\sigma_1 \cdot \Pi_\alpha. \tag{28}$$

Für $\chi = c_1$ und $\chi = \gamma_1$ bekommt man wegen $\delta_\chi \Lambda_1 = 0$, $\delta_\chi \mathsf{T}_1 = 0$ wieder (24).

II. Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender homogener Flüssigkeiten mit nur einer Symmetrieebene.

II 1. Die aus den Lagrangeschen Dreieckslösungen des Dreikörperproblems abgeleiteten Gleichgewichtsfiguren.

Wir wir bereits auf S. 205 erwähnt haben, ist es nicht notwendig, daß der Bezugskörper T, in dessen Nachbarschaft wir eine Gleichgewichtsfigur T_1 suchen, selbst eine Gleichgewichtsfigur ist, wenn nur für das Relativpotential von T die Abweichung von einer komponentenweise konstanten Funktion überall auf S genügend klein ist.

---

[21]) Vgl. meine Note, loc. cit. [3]).

[22]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) I, S. 240.

Wir nehmen jetzt als Ausgangskörper T das System der drei Kugeln T^ν ($\nu = 1, 2, 3$; $q = 3$) vom Radius $\mathfrak{r}_\nu$, deren Mittelpunkte die Koordinaten $x_\nu, y_\nu, 0$ haben. Dabei soll

$$x_\nu = x_\nu^0 + \xi_\nu, \qquad y_\nu = y_\nu^0 + \eta_\nu \tag{29}$$

sein und die Punkte $(x_\nu^0\, y_\nu^0)$ der Ebene $z = 0$ eine Lagrangesche Dreiecks-konfiguration der drei Massenpunkte $m_\nu = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}_\nu^3 f_\nu = \mathsf{T}^\nu \cdot f_\nu$ bilden, die zur Winkelgeschwindigkeit ω gehört; für die Seitenlänge L des gleichseitigen Dreiecks m_1, m_2, m_3 gilt dann bekanntlich[22a])

$$\omega^2 = \frac{\varkappa M}{\mathsf{L}^3}, \qquad M = \sum_{\nu=1}^{3} m_\nu. \tag{30}$$

Unsere Aufgabe ist, für hinreichend kleines ω, d. h. hinreichend großes L die Gleichgewichtsfiguren T_1 zu ermitteln, die in der Nachbarschaft des entsprechenden Kugelsystems liegen[23]).

Gegenüber dem Fall, wo der Ausgangskörper eine Gleichgewichtsfigur ist, treten nur unwesentliche Änderungen ein: Für das System T der drei Kugeln ist:

$$f\,V(XYZ) = C + \Phi(XYZ),$$

$$\text{wo } C = \frac{4}{3}\pi\,\mathfrak{r}_\nu^3 f_\nu^2 \equiv C^{(\nu)} \text{ auf } S^\nu, \quad \Phi(xyz) = f\int_{T-T^\nu} \frac{f'\,d\tau'}{D} \text{ in } T^\nu + S^\nu; \tag{31}$$

$$F(XYZ) = C + \Psi(XYZ). \tag{32}$$

Die Funktion

$$\Psi(xyz) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\varkappa} f\cdot(x^2 + y^2) + \Phi(xyz) \tag{33}$$

entwickeln wir auf S^ν zunächst nach Potenzen von $X - x_\nu$, $Y - y_\nu$, $Z - z_\nu$:

$$\Psi(XYZ) = \Psi(x_\nu, y_\nu, 0) + \sum \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x_\nu, y_\nu, 0)(X - x_\nu) + \Psi_2. \tag{34}$$

Hier ist, wie man leicht sieht,

$$\Psi_2 = O(\mathsf{L}^{-3}). \tag{35}$$

Weiter ist z. B.

$$\mathsf{T}^\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x_\nu, y_\nu, 0) = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu}, \tag{36}$$

[22a]) Vgl. Gleichung (74) in Anm. [30]).

[23]) Die analoge Aufgabe der Ermittelung einer aus zwei getrennten Flüssigkeitsmassen bestehenden Gleichgewichtsfigur ist von Herrn Lichtenstein loc. cit. [2]) II gelöst worden. In der Einführung der sehr zweckmäßigen Koordinaten ξ_ν, η_ν, welche die Parameter r_α vertreten, folgen wir der unter [4]) zitierten Dissertation von Herrn Kähler.

wo

$$\Lambda = \mathfrak{U} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\varkappa}\mathfrak{J}, \quad \mathfrak{U} = m_1 m_2 m_3 \mathsf{U}, \quad \mathfrak{J} = \sum m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2), \tag{37}$$

$$\mathsf{U} = \sum \frac{\mu_\nu}{r_\nu}, \quad \mu_\nu = \frac{1}{m_\nu};$$

$$r_\nu^2 = (x_{\nu'} - x_{\nu''})^2 + (y_{\nu'} - y_{\nu''})^2, \quad \nu, \nu', \nu'' \text{ Permutation von } 1, 2, 3.$$

Nun ist noch $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}$ nach Potenzen von ξ_α zu entwickeln[24]). Dabei ist das absolute Glied $\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\right)^0 = 0$, da die Lagrangesche Dreieckskonfiguration $(x_\nu^0\, y_\nu^0)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ eine Lage relativen Gleichgewichts ist. Die Glieder positiven Grades in ξ_α enthalten sämtlich sicher den Faktor L^{-3}, so daß wir schreiben können:

$$\Psi(XYZ) = \Psi(x_\nu y_\nu 0) + \overline{\Psi}, \qquad \overline{\Psi} = O(\mathsf{L}^{-3}). \tag{38}$$

Um nun auf die Entwicklung von

$$F_1(X_1 Y_1 Z_1) - C_1 = F_1(X_1 Y_1 Z_1) - F(XYZ) + \Psi(XYZ) - s, \tag{39}$$

wo $C_1 = C + s$ ist, zu kommen, zerlegen wir in Formel (2) mittels des Kernes

$$\delta = \delta(\sigma, \sigma') = \begin{cases} 1, \text{ falls } \sigma, \sigma' \text{ auf derselben Komponente von } S \text{ liegen,} \\ 0, \text{ falls } \sigma, \sigma' \text{ auf verschied. Komponenten von } S \text{ liegen:} \end{cases} \tag{40}$$

$$J_t = \bar{J}_t + \bar{\bar{J}}_t, \tag{41}$$

$$\bar{J}_t = \int_{S_t} \frac{\delta}{\varrho_t} f' \cdot (\zeta' \cos \varphi_t' - \zeta \cos \theta_t')\, d\sigma_t',$$

$$\bar{\bar{J}}_t = \int_{S_t} \frac{1-\delta}{\varrho_t} f' \cdot (\zeta' \cos \varphi_t' - \zeta \cos \theta_t')\, d\sigma_t'. \tag{42}$$

Es ist

$$\bar{J}_t = \bar{J}_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{J}_\tau\, d\tau, \quad \bar{J}_0 = \psi_0 \zeta + \int_S \frac{\delta}{\varrho} f' \zeta'\, d\sigma'; \quad \psi_0 = \frac{4\pi}{3} \mathrm{r}_\nu f_\nu \text{ auf } S^\nu. \tag{43}$$

Man bekommt also

$$V_1(X_1 Y_1 Z_1) - V(XYZ) = \bar{J}_0 + {}^{(3)}\bar{U} + {}^{(1)}\bar{U}; \tag{44}$$

hier ist

---

[24]) Wir bezeichnen gleichförmig ξ_ν, η_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ mit ξ_α $(\alpha = 1, \ldots, 6)$ und ebenso x_ν, y_ν mit x_α.

$$(45)\qquad {}^{(2)}\bar{U} = \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{J}_\tau \, d\tau, \qquad |{}^{(2)}U| < \text{konst.} \cdot \varepsilon^2,$$

$$(46)\qquad {}^{(1)}\bar{\bar{U}} = \int_0^1 \bar{J}_t \, dt, \qquad |{}^{(1)}\bar{\bar{U}}| < \text{konst.} \cdot \varepsilon \, \mathsf{L}^{-1},$$

falls für ζ und seine ersten Ableitungen $D\zeta$ auf S gilt: $|\zeta|, |D\zeta| < \varepsilon$.

Schließlich ergibt sich, falls wir $s = \Psi(x_\nu y_\nu 0)$ auf S^ν setzen,

$$(47)\qquad F_1(X_1 Y_1 Z_1) - C_1 \equiv L(\zeta) - \Pi(\mathsf{L}^{-1}, \xi_\alpha; \zeta),$$

wo

$$(48)\qquad L(\zeta) = g\zeta + \int_S K\zeta' \, d\sigma', \qquad g = \psi_0 f = \frac{4\pi}{3} \mathfrak{r}_\nu f_\nu^2 \text{ auf } S^\nu, \qquad K = \delta \cdot \frac{f f'}{\varrho},$$

$$(49)\qquad \Pi(\mathsf{L}^{-1}, \xi_\alpha; \zeta) = f \cdot \Big(- \frac{M}{\mathsf{L}^3} (Xa + Yb)\zeta - \frac{M}{2\mathsf{L}^3} (a^2 + b^2)\zeta^2 - {}^{(2)}\bar{U} - {}^{(1)}\bar{\bar{U}} \Big) - \bar{\Psi}.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß T_1 eine Gleichgewichtsfigur ist, spricht sich jetzt in der folgenden fundamentalen Integrodifferentialgleichung aus:

$$(50)\qquad L(\zeta) = \Pi(\mathsf{L}^{-1}, \xi_\alpha; \zeta).$$

Es ist also gegenüber den allgemeinen Betrachtungen von I, §§ 2, 3 in Π nur der Parameter s weggefallen; an Stelle von λ haben wir L^{-1}, außerdem enthält Π noch die Parameter ξ_α $(\alpha = 1, \ldots, 6)$.

Die homogene Integralgleichung $L(u) = 0$ hat im vorliegenden Falle $m = 9$ Nullösungen u_α:

$$\frac{4\pi}{3} \mathfrak{r}_\nu^{\frac{3}{2}} f_\nu \cdot u_\alpha = a, \; b, \; c \text{ auf } S^\nu \text{ und } = 0 \text{ auf } S - S^\nu; \qquad \nu = 1, 2, 3.$$

Wir verfahren nun wie oben, setzen aber sofort $r_\alpha = 0$ und lösen die Integrodifferentialgleichung (18) mit diesen verschwindenden r-Werten und willkürlichen (hinreichend kleinen) ξ_α-Werten für genügend kleine L^{-1} durch sukzessive Approximationen auf. Da die von ζ unabhängigen Terme in Π sämtlich den Faktor L^{-3} enthalten, so enthalten ihn auch alle Approximationen, mithin auch ζ selbst, so daß offenbar $\zeta = O(\mathsf{L}^{-3})$.

Nachträglich sind dann die Parameter ξ_α als Funktionen von L^{-1} so zu bestimmen, daß die Verzweigungsgleichungen $\Pi_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, 9)$ erfüllt sind.

II 2. Diskussion der Verzweigungsgleichungen.

Es wäre leicht, ganz direkt durch eine etwas genauere Betrachtung von Π, insbesondere der in Ψ steckenden Linearausdrücke in ξ_α, die Verzweigungsgleichungen $\Pi_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, 9)$ soweit aufzustellen, daß der

Charakter ihrer Lösungen beurteilt werden kann. Um aber die mechanische Bedeutung der Verzweigungsgleichungen möglichst klar hervortreten zu lassen, greifen wir auf die allgemeine Formel (28) zurück. Wir setzen

$$\chi = \chi_\alpha = a_1, b_1, c_1 \text{ auf } S^\nu \text{ und } = 0 \text{ auf } S - S^\nu;\ \nu = 1, 2, 3\ (\alpha = 1, \ldots, 9).$$

$\delta_{\chi_\alpha} \Lambda_1 = \Lambda_{1\alpha}$ geschrieben, ist wegen

$$\delta_{\chi_\alpha} \mathsf{T}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \det(\chi_{\alpha\beta}) = \det\left(\int g \chi_\alpha u_\beta d\sigma_1\right) \neq 0 \quad [\text{vgl. S. 212}]$$

für kleine $\mathsf{L}^{-1}, \xi_\beta$ das System

$$\Lambda_{1\alpha} = 0 \tag{51}$$

hinsichtlich seiner Lösungen $\xi_\alpha = \xi_\alpha(\mathsf{L}^{-1})$ vollständig äquivalent mit dem System der Verzweigungsgleichungen.

Da T_1 die xy-Ebene als Symmetrieebene besitzt, sind die zu $u_\alpha = \text{konst.}\, c_\nu$ [25]) gehörigen drei Gleichungen $\Lambda_{1\alpha} = 0$ identisch erfüllt. Wir denken uns die Numerierung so vorgenommen, daß die übrigen Gleichungen durch $\Lambda_{1\alpha} = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, 6)$ gegeben sind.

Hier kann man nun auf Grund der Entwicklungen von Herrn Lichtenstein [26]) schreiben, mit $\Lambda_0 = \Lambda + \frac{1}{5} \frac{\omega^2}{\varkappa} \sum_\nu f_\nu \mathsf{T}_\nu \mathfrak{r}_\nu^2$:

$$\Lambda_1 = \Lambda_0 + \int_0^1 dt \int_{S_t} F_t(X_t Y_t Z_t) f \zeta \cos \varphi_t \, d\sigma_t = \Lambda_0 + \sum_\nu f_\nu C^{(\nu)} (\mathsf{T}_1^\nu - \mathsf{T}^\nu) + \bar{\Lambda}_1. \tag{52}$$

Dabei ist $F_t(X_t Y_t Z_t)$ das Relativpotential des Körpers T_t in einem Punkt seiner Oberfläche. Es gilt

$$|\bar{\Lambda}_1| < \text{konst.} \cdot \varepsilon (\mathsf{L}^{-1} + \varepsilon). \tag{53}$$

Mit Rücksicht auf $\zeta = O(\mathsf{L}^{-3})$ ist also $\Lambda = O(\mathsf{L}^{-4})$. Weiter ist

$$\Lambda_{1\alpha} = \Lambda_\alpha + \bar{\Lambda}_{1\alpha}. \tag{54}$$

Hierbei gilt, wenn man genauer zusieht, sogar $\Lambda_{1\alpha} = O(\mathsf{L}^{-5})$. Λ hängt nur von $x_\alpha = x_\alpha^0 + \xi_\alpha$ ab, und es ist einfach

$$\Lambda_\alpha = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}. \tag{55}$$

Die Entwicklung von Λ_α nach Potenzen der ξ_β ist die linke Seite der zur Gleichgewichtslage (x_α^0) gehörigen α-ten Jacobischen Gleichung von Λ. Sie beginnt mit der Linearform $l_\alpha(\mathsf{L}^{-1}; \xi)$, so daß die (stellvertretenden) Verzweigungsgleichungen (51) die Gestalt

$$\Lambda_{1\alpha} \equiv l_\alpha(\mathsf{L}^{-1}; \xi) - \pi_\alpha(\mathsf{L}^{-1}; \xi) = 0 \tag{56}$$

---

[25]) $c_\nu = c$ auf S^ν und $= 0$ auf $S - S^\nu$.

[26]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) II, S. 184 ff.

haben. In l_α und π_α enthalten die Koeffizienten der ξ den Faktor L^{-3} bzw. L^{-4}:

$$(57)\qquad \begin{gathered} l_\alpha(\mathsf{L}^{-1};\xi) = \mathsf{L}^{-3} l_\alpha(1;\xi) = \mathsf{L}^{-3} l_\alpha(\xi), \quad l_\alpha(\xi) = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma}\xi_\gamma, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \\ \pi_\alpha(\mathsf{L}^{-1};\xi) = \mathsf{L}^{-3}\tilde{\pi}_\alpha(\mathsf{L}^{-1};\xi); \qquad \tilde{\pi}_\alpha(\mathsf{L}^{-1};\xi) = O(\mathsf{L}^{-1}). \end{gathered}$$

Also

$$(58)\qquad \tilde{\Lambda}_{1\alpha} \equiv l_\alpha(\xi) - \tilde{\pi}_\alpha(\mathsf{L}^{-1};\xi) = 0\,.$$

Zum Schluß (II § 3) werden wir sehen, daß die zu (58) gehörigen linearen homogenen Gleichungen (das sind die zu Λ gehörigen Variationsgleichungen für die Nachbarschaft von (x_α^0))

$$(59)\qquad l_\alpha(\xi) \equiv \sum_\beta a_{\alpha\beta}\xi_\beta = 0$$

genau eine Lösung $\xi_\beta = d_\beta$ mit $\sum d_\beta^2 = 1$ besitzen, die von den infinitesimalen Drehungen der Lagrangeschen Dreieckskonfiguration um die z-Achse herrührt; d_α ist proportional $-y_\nu^0, x_\nu^0$ $(\nu = 1,2,3)$.

Dies vorweggenommen, wenden wir auf die Matrix $(a_{\alpha\beta})$ das Analogon der Schmidtschen Zerspaltung an[27]: wir setzen

$$(60)\qquad a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{(1)} - d_\alpha d_\beta\,.$$

Dann ist $\det(a_{\alpha\beta}^{(1)}) \neq 0$ und das Gleichungssystem

$$(61)\qquad l_\alpha^{(1)}(\xi) \equiv \sum_\beta a_{\alpha\beta}^{(1)}\xi_\beta = r\,d_\alpha + \tilde{\pi}_\alpha, \qquad r = \sum_\beta \xi_\beta d_\beta$$

durch sukzessive Approximationen auflösbar, falls r als willkürlicher kleiner Parameter angesehen wird. Für diese Lösung $\xi_\alpha = \xi_\alpha(\mathsf{L}^{-1}, r)$ von (61) ist genau wie oben S. 207

$$(62)\qquad \begin{gathered} \tilde{\Lambda}_{1\alpha} = -d_\alpha \sum_\beta d_\beta\xi_\beta + l_\alpha^{(1)}(\xi) - \tilde{\pi}_\alpha = d_\alpha\Big(-\sum_\beta d_\beta\xi_\beta + r\Big) \equiv \tilde{\Pi}_*\, d_\alpha \\ \text{und} \qquad \tilde{\Pi}_* = \sum_\alpha d_\alpha \tilde{\Lambda}_{1\alpha}. \end{gathered}$$

Nun gilt für die (passend normierte) Drehung

$$(63)\qquad \tilde{\gamma}_1 = (X_1 b_1 - Y_1 a_1)\big(\sum x_\alpha^2\big)^{-\frac{1}{2}}$$

wegen (28) offenbar

$$(64)\qquad 0 = -\mathsf{L}^3 \cdot \sum_\alpha \tilde{\gamma}_{1\alpha} H_\alpha = \sum_{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_{1\alpha}\chi^{\alpha\beta}\tilde{\Lambda}_{1\beta} = \Big(\sum_{\alpha\beta}\tilde{\gamma}_{1\alpha}\chi^{\alpha\beta}d_\beta\Big)\cdot\tilde{\Pi}_*$$

mit $\tilde{\gamma}_{1\alpha} = -\int_S g\,\tilde{\gamma}_1 u_\alpha\, d\sigma_1$ und der zu $(\chi_{\alpha\beta}) = \big(-\int_S g\,\chi_\alpha u_\beta\, d\sigma_1\big)$ reziproken Matrix $(\chi^{\alpha\beta})$. Aus[27a])

$$(\chi_{\alpha\beta}) = \Big(\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}_\alpha^{\frac{3}{2}} f_\alpha\,\delta_{\alpha\beta} + O(\mathsf{L}^{-1})\Big) \text{ folgt } (\chi^{\alpha\beta}) = \Big(\frac{3}{4\pi}\mathfrak{r}_\alpha^{-\frac{3}{2}} f_\alpha^{-1}\,\delta_{\alpha\beta} + O(\mathsf{L}^{-1})\Big).$$

[27]) Für die Methode der unendlich vielen Variablen bei A. Wintner, loc. cit. [5]), S. 298.

[27a]) Es ist $\mathfrak{r}_\alpha = \mathfrak{r}_\nu$, $f_\alpha = f_\nu$, falls α zur ν-ten Masse gehört.

Ferner ist auf S^ν

$$(65)\quad (\sum x_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\tilde{\gamma} = (x_\nu + X - x_\nu)\,b - (y_\nu + Y - y_\nu)\,a = x_\nu^0\,b - y_\nu^0\,a + \dots .$$

Die zu

$$(66)\quad u_\alpha = \begin{cases} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-1} \mathfrak{r}_\nu^{-\frac{3}{2}} f_\nu^{-1}\cdot a, & \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-1} \mathfrak{r}_\nu^{-\frac{3}{2}} f_\nu^{-1}\cdot b \quad \text{auf } S^\nu, \\ 0, & 0 \quad \text{auf } S - S^\nu \end{cases}$$

gehörigen $\tilde{\gamma}_{1\alpha}$ sind somit bis auf Glieder höherer Ordnung gleich

$$\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}_\nu^{\frac{3}{2}} f_\nu\cdot(-\bar{y}_\nu^0), \qquad \frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}_\nu^{\frac{3}{2}} f_\nu\cdot\bar{x}_\nu^0; \qquad \bar{x}_\alpha^0 = x_\alpha^0\cdot(\sum x_\alpha^{0\,2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Daraus folgt, daß

$$(67)\qquad \sum_{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta}\,\tilde{\gamma}_{1\alpha}\,d_\beta = 1 + \dots ,$$

also für absolut hinreichend kleine Werte der Parameter > 0 ist, und aus (64) folgt $\tilde{\Pi}_* = 0$ für alle solche Werte von r, insbesondere für $r = 0$. Damit ist die Lösung $\xi_\alpha = O(\mathsf{L}^{-1})$ der Verzweigungsgleichungen gefunden, also die Existenz der gesuchten Gleichgewichtsfiguren T_1 bewiesen.

II 3. Eine Extremumseigenschaft der Lagrangeschen Dreieckslösungen.

Wir haben noch die Nullösungen der zu Λ gehörigen Jacobischen Gleichungen (58) für die Nachbarschaft einer Lagrangeschen Dreiecksl ösung (x_α^0) zu ermitteln, also die Lösungen der Variationsgleichungen (59) von S. 214. Wir knüpfen an die Tatsache an, daß die Lagrangeschen Dreieckskonfigurationen, für die

$$(37)\qquad \Lambda = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\varkappa}\,\mathfrak{J} + \mathfrak{U}, \qquad \mathfrak{J} = \sum m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2)$$

einen stationären Wert $\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha} = 0\right)$ annimmt, auch dadurch charakterisiert werden können, daß für sie die gegen Ähnlichkeitstransformationen (der x, y-Ebene) invariante Funktion

$$(68)\quad \Omega = \sqrt{\mathsf{I}}\,\mathsf{U}, \qquad \mathsf{I} = \sum \mu_\nu r_\nu^2, \qquad \mathsf{U} = \sum \frac{\mu_\nu}{r_\nu} = \frac{\mathfrak{U}}{m_1 m_2 m_3}, \qquad \mu_\nu = \frac{1}{m_\nu}$$

stationär $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_\alpha} = 0\right)$ wird[28]); dabei hat man sich[29]) bei der zweiten Extremumsaufgabe auf solche Konfigurationen $m_\nu(x_\nu, y_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ zu be-

[28]) Auf das Stationärwerden dieser Funktion führte Herr Herglotz (in seinem Kolleg über Himmelsmechanik, W.-S. 1926/27) die Bestimmung der (ähnlichen) Lagrangeschen Lösungen des Dreikörperproblems zurück.

[29]) Vgl. die Anm. [30]) auf der nächsten Seite.

schränken, deren Schwerpunkt im Ursprung des x, y-Achsenkreuzes liegt und für die

$$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}} = \frac{\omega^2}{\varkappa} \tag{69}$$

ist.

Wir werden nun so vorgehen, daß wir die Jacobischen Gleichungen von Λ mit denen von Ω in Zusammenhang bringen; diese letzteren werden wir dann bezüglich ihrer Nullösungen sehr leicht beherrschen können.

Die Nullösungen der zu Λ gehörigen Jacobischen Gleichungen für die Nachbarschaft einer Lagrangeschen Gleichgewichtskonfiguration genügen gewissen linearen Relationen (entsprechend den Integralen der Variationsgleichungen); diese ergeben sich aus den Identitäten

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Lambda(x_\mu^0 + t, y_\mu^0)}{\partial x_\alpha}\right]_{t=0} &= l_\alpha(1,0) = \frac{\omega^2}{\varkappa} m_\nu, \quad 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Lambda(x_\mu^0, y_\mu^0 + t)}{\partial x_\alpha}\right]_{t=0} &= l_\alpha(0,1) = \quad 0, \quad \frac{\omega^2}{\varkappa} m_\nu \end{aligned}\right\}, \text{ je nachdem } x_\alpha = x_\nu, y_\nu. \tag{70}$$

Hier haben wir in $\Lambda(x, y)$ und $l_\alpha(\xi, \eta)$ die beiden auf die x- bzw. y-Achse bezüglichen Reihen von Variablen unterschieden. Aus (70) folgert man für eine Nullösung ξ_ν, η_ν der Jacobischen Gleichungen die Orthogonalitätsrelationen

$$\sum m_\nu \xi_\nu = 0, \qquad \sum m_\nu \eta_\nu = 0; \tag{71}$$

ebenso aus

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Lambda(x_\beta^0 (1+t))}{\partial x_\alpha}\right]_{t=0} = -2\frac{\partial \mathfrak{U}(x_\beta^0)}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\varkappa}\frac{\partial \mathfrak{J}(x_\beta^0)}{\partial x_\alpha} = \frac{3}{2}\frac{\omega^2}{\varkappa}\frac{\partial \mathfrak{J}(x_\beta^0)}{\partial x_\alpha}, \tag{72}$$

d. i.

$$l_\alpha(x^0, y^0) = 3\frac{\omega^2}{\varkappa} m_\alpha x_\alpha^0,$$

entsprechend

$$\sum m_\nu (x_\nu^0 \xi_\nu + y_\nu^0 \eta_\nu) = 0. \tag{73}$$ [30])

Um zunächst einzusehen, daß die Funktion Ω die Bedingungen des relativen Gleichgewichts liefert, bilden wir

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_\alpha} = \sqrt{\mathfrak{I}}\left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{I}} \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\mathfrak{I}}}{m_1 m_2 m_3}\left(\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}^*}\frac{\partial \mathfrak{J}^*}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{75}$$

---

[30]) Da den Drehungen um den Ursprung jedenfalls eine Nullösung ($\xi_\nu = -y_\nu^0, \eta_\nu = x_\nu^0$) des Jacobischen Gleichungssystems (58) entspricht, entnimmt man aus den Relationen (71) beiläufig, daß der Schwerpunkt einer Lagrangeschen Gleichgewichtskonfiguration im Ursprung liegt.

Ferner ist für eine Gleichgewichtskonfiguration aus Homogenitätsgründen

$$0 = \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} x_\alpha = \frac{\omega^2}{\varkappa}\sum m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2) - \mathfrak{U} = \frac{\omega^2}{\varkappa}\mathfrak{J} - \mathfrak{U}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}} = \frac{\omega^2}{\varkappa}. \tag{74}$$

Hier ist bekanntlich das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes $(x_0\, y_0)$

$$\mathfrak{J}^* = \frac{m_1 m_2 m_3}{M} \mathsf{I}, \qquad M = \sum m_\nu, \tag{76}$$

mithin

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{J}^*}{\partial x_\nu} = m_\nu (x_\nu - x_0), \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{J}^*}{\partial y_\nu} = m_\nu (y_\nu - y_0). \tag{77}$$

Normiert man also die Lösungen der Extremumsaufgabe für Ω durch die Bedingung, daß die Ω stationär machenden Konfigurationen ihren Schwerpunkt im Ursprung und die durch $\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}^*} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}} = \frac{\omega^2}{\varkappa}$ bestimmte Dimension haben sollen, so bekommen wir genau die durch die Extremumsaufgabe für Λ gelieferten Lagrangeschen Konfigurationen des Gleichgewichts in einem mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung rotierenden $x\,y$-System.

Jetzt gehen wir noch einen Schritt weiter und bilden die linearen Glieder der Entwicklung von $\frac{\partial \Omega}{\partial x_\alpha}$ in der Umgebung einer Lagrangeschen Gleichgewichtskonfiguration (x_α^0); diese Linearformen in $\delta x_\nu = \xi_\nu$, $\delta y_\nu = \eta_\nu$ bezeichnen wir kurz mit $\delta \frac{\partial \Omega}{\partial x_\alpha}$. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial \Omega}{\partial x_\nu} &= \frac{\sqrt{\mathsf{I}}}{m_1 m_2 m_3}\, \delta \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} + \left(\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}^*} - \frac{\omega^2}{\varkappa} \right) m_\nu x_\nu - \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}^*} m_\nu x_0 \right) \\ &= \frac{\sqrt{\mathsf{I}}}{m_1 m_2 m_3} \left(\delta \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} + \delta \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}^*} \cdot m_\nu x_\nu^0 - \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}^*} m_\nu\, \delta x_0 \right). \end{aligned} \tag{78}$$

Nun gilt mit $D^2 = x_0^2 + y_0^2$

$$\begin{aligned} \delta \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}^*} &= \delta \frac{\sqrt{\mathfrak{J}^*}\,\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}^{*\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{2}\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}^{*2}} \delta \mathfrak{J}^*, \\ \frac{1}{2}\delta \mathfrak{J}^* &= \frac{1}{2}\delta \mathfrak{J} - \frac{1}{2} M\, \delta D^2 = \sum m_\alpha x_\alpha^0\, \delta x_\alpha, \\ M\, \delta x_0 &= \sum m_\nu\, \delta x_\nu, \qquad M\, \delta y_0 = \sum m_\nu\, \delta y_\nu. \end{aligned} \tag{79}$$

Setzen wir speziell für δx_ν, δy_ν eine Nullösung ξ_ν, η_ν der Variationsgleichungen $\delta \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = 0$, so folgt wegen der Orthogonalitätsrelationen (71), (73): $\delta \frac{\partial \Omega}{\partial x_\alpha} = 0$. Für diese Werte ξ_α wird also die quadratische Form der Glieder 2. Grades in der Entwicklung von Ω an der Stelle (x_α^0) verschwinden: $\Omega_2(\xi_\alpha) = 0$.

Die Form Ω_2 ist aber semidefinit von leicht explizit angebbarer Gestalt. Es ist nämlich, wenn $\varphi(\varrho) = \frac{1}{\varrho}$, $\Omega_0 = (\sum \mu_\nu)^{\frac{3}{2}}$, der Wert von Ω für $r_1 = r_2 = r_3 = \mathsf{L}$, eingeführt wird,

$$\Omega \equiv \frac{\sum \mu_\nu (r_\nu^2)^{-\frac{1}{2}}}{(\sum \mu_\nu r_\nu^2)^{-\frac{1}{2}}} = (\sum \mu_\nu)^{\frac{3}{2}} \frac{\sum \mu_\nu (r_\nu^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sum \mu_\nu} : \left(\frac{\sum \mu_\nu r_\nu^2}{\sum \mu_\nu}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

(80)

$$= \Omega_0 \frac{\sum \mu_\nu \varphi(r_\nu^2)}{\sum \mu_\nu} : \varphi\left(\frac{\sum \mu_\nu r_\nu^2}{\sum \mu_\nu}\right).$$

Für die Funktionen $\varphi(\varrho)$ gilt nun wegen $\varphi''(\varrho) > 0$ für $\varrho > 0$ nach dem Mittelwertsatz von O. Hölder[31])

$$\frac{\sum \mu_\nu \varphi(\varrho_\nu)}{\sum \mu_\nu} = \varphi(\bar{\varrho}) + \frac{\Phi}{2} \frac{\sum \mu_\varkappa \mu_\lambda (\varrho_\varkappa - \varrho_\lambda)^2}{(\sum \mu_\nu)^2}; \tag{81}$$

hier ist

$$\bar{\varrho} = \frac{\sum \mu_\nu \varrho_\nu}{\sum \mu_\nu} \tag{82}$$

der Mittelwert aus den Argumenten ϱ_ν und Φ der Wert von $\varphi''(\varrho)$ in einem Zwischenpunkt des Intervalls $[\min(\varrho_\nu), \max(\varrho_\nu)]$. Wir bekommen daraus, wenn wir $\varrho_\nu = r_\nu^2$ einsetzen,

$$\Omega = \Omega_0 + {}^{(2)}\Omega, \qquad {}^{(2)}\Omega = \frac{\Phi \sqrt{1}}{\sum \mu_\nu} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\varkappa\lambda} \mu_\varkappa \mu_\lambda (r_\varkappa^2 - r_\lambda^2)^2. \tag{83}$$

Die Glieder 2. Grades in der Entwicklung von Ω ergeben die quadratische Form

$$\Omega_2 = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\sum \mu_\nu} \cdot L^4} \cdot \frac{1}{2} \sum \mu_\varkappa \mu_\lambda [\delta(r_\varkappa^2) - \delta(r_\lambda^2)]^2. \tag{84}$$

Für das Verschwinden dieser semidefinitiven Form ist notwendig und hinreichend, daß die Linearformen

$$\frac{1}{2}[\delta(r_\varkappa^2) - \delta(r_\lambda^2)] = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 2, 3;\ 3, 1;\ 1, 2) \tag{85}$$

ausfallen. Diese drei Gleichungen mit den sechs Unbekannten $\delta x_\nu = \xi_\nu$, $\delta y_\nu = \eta_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ haben wegen der Gleichseitigkeit des Ausgangsdreiecks sicher vier linear unabhängige der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen entsprechende Lösungen. Weiter haben sie aber keine Lösung; die Koeffizientenmatrix von (85) besitzt nämlich den Rang 2, indem die zweireihige Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} x_\nu^0 - x_\lambda^0 & y_\nu^0 - y_\lambda^0 \\ x_\varkappa^0 - x_\lambda^0 & y_\varkappa^0 - y_\lambda^0 \end{vmatrix} = \Delta^0, \tag{86}$$

d. h. gleich dem doppelten Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks ist, also nicht verschwindet.

Von den Verrückungen, die den Ähnlichkeitstransformationen entsprechen, kommen als Nullösungen der Jacobischen Gleichungen aber nur die Drehungen in Betracht, die ja auch tatsächlich Nullösungen liefern (wegen

[31]) O. Hölder, loc. cit. [5]).

der Invarianz von Λ gegen Drehungen um den Ursprung)[32]). Die Verschiebungen und die ähnliche Vergrößerung sind nicht Lösungen der Variationsgleichungen (59), da sie nicht den linearen „Integralen“ $(71)_{1,2}$ und (73) genügen.

II 4. Herstellung schwach unsymmetrischer Gleichgewichtsfiguren auf anderem Wege.

Gleichgewichtsfiguren mit kleinen Unsymmetrien lassen sich auch unter Zugrundelegung der von Herrn Kähler angegebenen symmetrischen Gleichgewichtsfiguren als Ausgangsfigur T in einfacher Weise dadurch gewinnen, daß man bei festgehaltener Winkelgeschwindigkeit die Parameter s so wählt, daß die drei Körper voneinander (wenig) verschiedene Volumina bekommen. Die Dichte sei im ganzen System konstant, da nur in diesem Fall das Auftreten von Unsymmetrien von Interesse ist.

Wir gehen also aus von der aus drei gleichen, weit voneinander entfernten Massen bestehenden symmetrischen Gleichgewichtsfigur T, die mit hinreichend kleiner Winkelgeschwindigkeit $\omega^2 = \frac{\varkappa M}{L^3}$ um die z-Achse rotiert. Die Existenz solcher Gleichgewichtsfiguren läßt sich auch unabhängig von den Betrachtungen des § 1 einsehen[33]).

Man braucht nun nur nachzuweisen, daß diese symmetrischen Gleichgewichtsfiguren bei genügend kleinem ω keine Verzweigungsfiguren sind.

Wir zerlegen auf S^ν ähnlich wie oben (S. 210):

$$fV = fV^{(\nu)} + \Phi^{(\nu)}, \qquad V^{(\nu)} = \int_{T^\nu} \frac{f' d\tau'}{D}, \tag{87}$$

$$F = fV^{(\nu)} + \Psi^{(\nu)}. \tag{88}$$

Es sei $(a_\nu, b_\nu, c_\nu) = (a, b, c)$ auf S^ν, $= (0, 0, 0)$ auf $S - S^\nu$. Dann gilt[34])

$$L(a_\nu) = \frac{\partial}{\partial x}\Psi^{(\nu)}(XYZ) \text{ auf } S^\nu, \quad = -f\frac{\partial}{\partial x}V^{(\nu)}(XYZ) \text{ auf } S - S^\nu \tag{89}$$

$(\nu = 1, 2, 3)$ und analog die Integralgleichungen, die hieraus durch

[32]) Dies Resultat folgt auch aus den Untersuchungen von S. Oppenheim, Publ. der v. Kuffnerschen Sternwarte **4** (1896), B S. 13–31, und P. Pedersen, Astr. Nachr. **211** (1920), S. 34–42; dort auch ein Hinweis von E. Strömgren auf eine Abhandlung von Routh, London Math. Soc. Proc. **6** (1875), S. 86–97. Vgl. A. Liapounoff, Bull. astr. **6** (1889), S. 481–488.

[33]) E. Kähler, loc. cit. [4]).

[34]) Wegen der Integralgleichungen (89), (90), (95) und der zugehörigen Orthogonalitätsrelationen vgl. meine Note: Über einige Integralgleichungen aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Anwendung auf Stabilitätsbetrachtungen. Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 1926, S. 1–20.

zyklische Vertauschung der Koordinaten hervorgehen. Ferner gilt für $p_\nu = p = Xa + Yb + Zc$ auf S^ν, $= 0$ auf $S - S^\nu$:

$$(90)\quad \begin{aligned} L(p_\nu) &= 2C - 2\Phi^{(\nu)} + \sum X \frac{\partial \Phi^{(\nu)}}{\partial x} \text{ auf } S^\nu, \quad = 2fV^{(\nu)} - f\sum X\frac{\partial V^{(\nu)}}{\partial x} \text{ auf } S - \\ &= 2C - \frac{2k}{\mathsf{L}} + O(\mathsf{L}^{-2}) \qquad \text{auf } S^\nu, \quad = \frac{k}{\mathsf{L}} + O(\mathsf{L}^{-2}) \qquad \text{auf } S - \end{aligned}$$

Die Konstante k ist unabhängig von L:

$$k = \frac{5}{6}\mathsf{T}f^2, \quad \mathsf{T} = 4\pi\mathfrak{r}^3 = \text{Volumen von } T = T^1 + T^2 + T^3.$$

Sei nun u eine Nullösung unserer Integrodifferentialgleichung (10), es sei also

$$L(u) \equiv gu + \int_S K u' d\sigma' = 0;$$

dann folgen zunächst aus den inhomogenen Integralgleichungen (90) Orthogonalitätsrelationen von der Form

$$(91)\qquad \sum_\nu [2C\delta_{\mu\nu} + O(\mathsf{L}^{-1})]\, u_0^{(\nu)} = O(\mathsf{L}^{-2}) \qquad (\mu = 1, 2, 3),$$

wo

$$(92)\qquad u_0^{(\nu)} = \int_{S^\nu} u\, d\sigma$$

bedeutet. Da für hinreichend große L die Determinante dieses Gleichungssystems in $u_0^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ sicher $\neq 0$ ist, so folgt

$$(93)\qquad u_0^{(\nu)} = O(\mathsf{L}^{-2}).$$

Aber auch die rechten Seiten der inhomogenen Integralgleichungen (89) müssen mit u multipliziert und über S integriert verschwinden. In diesen Orthogonalitätsrelationen treten unter anderen Glieder auf, die mit

$$(94)\qquad u_z^{(\nu)} = \int_{S^\nu} Z u\, d\sigma$$

multipliziert sind, diese spielen aber keine Rolle. Denn bei einer Drehung der ganzen Gleichgewichtsfigur T um die x- bzw. y-Achse (diesen Drehungen entspricht $\zeta = \alpha = Yc - Zb$ bzw. $\zeta = \beta = Za - Xc$) hat man noch

$$(95)\qquad L(\alpha) = -\frac{\omega^2 f}{\varkappa} YZ, \quad L(\beta) = +\frac{\omega^2 f}{\varkappa} XZ,$$

was für die Nullösung u die Beziehungen $\int_S YZu\, d\sigma = 0$, $\int_S XZu\, d\sigma = 0$, d. h. für die $u_z^{(\nu)}$ das Gleichungssystem

$$(96)\qquad \sum_\nu{}' \bar{x}_\nu^0 u_z^{(\nu)} = O(\mathsf{L}^{-1}), \qquad \sum_1 \bar{y}_\nu^0 u_z^{(\nu)} = O(\mathsf{L}^{-1})$$

nach sich zieht. Das zugehörige homogene System hat genau eine Lösung

$u_z^{(1)} = u_z^{(2)} = u_z^{(3)}$, somit hat die Lösung des inhomogenen Systems (96) die Form

$$u_z^{(\nu)} = \frac{1}{3} \sum_{\mu} u_z^{(\mu)} + O(\mathsf{L}^{-1}). \tag{97}$$

Es ist aber auch $\sum_{\mu} u_z^{(\mu)} = \int_S Z u \, d\sigma = O(\mathsf{L}^{-1})$, wenn unsere Nullösung durch

$$-\int_S g u u_1 \, d\sigma = 0 \tag{98}$$

normiert ist, was wir immer gemacht denken können. Beides zusammengenommen gibt

$$u_z^{(\nu)} = O(\mathsf{L}^{-1}). \tag{99}$$

Die rechte Seite einer der inhomogenen Integralgleichungen (89) hat allgemein die Form $\left(\frac{\partial}{\partial t} F_t^{(\alpha)}\right)_{t=0}$, $\alpha = 1, \ldots, 6$, wobei z. B. $F_t^{(\alpha)}$ das Relativpotential des Körpers $T_t^{(\alpha)}$ ist, der aus T entsteht, indem ein Körper T^{μ} ($\mu = 1, 2, 3$) einer Translation um die Strecke t in einer der beiden Koordinatenrichtungen, etwa in der x-Richtung, unterworfen wird, während die beiden anderen Körper $T - T^{\mu}$ festbleiben, und zwar ist $F_t^{(\alpha)}$ der Wert in einem Punkte der Oberfläche von $T_t^{(\alpha)}$. Diese rechte Seite ist nun mit u zu multiplizieren und über S zu integrieren; man bekommt leicht

$$\int_S \left(\frac{\partial}{\partial t} F_t^{(\alpha)}\right)_{t=0} u \, d\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_t^{(\alpha)}} F_t^{(\alpha)} u \, d\sigma_t^{(\alpha)}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Lambda_{t\varepsilon}^{(\alpha)}\right)_{t=0,\, \varepsilon=0}. \tag{100}$$

Hier[34a]) betrachtet man die Flächenschar, die aus der Fläche $S_t^{(\alpha)}$ hervorgeht, indem man auf ihrer Normalen die Strecke εu abträgt. Die partielle Ableitung nach ε für $\varepsilon = 0$ gibt die Variation bei der Deformation u von $S_t^{(\alpha)}$. Die zu den Körpern dieser zweiparametrigen Schar gehörigen Λ-Werte bezeichnen wir mit $\Lambda_{t\varepsilon}^{(\alpha)}$. Die Orthogonalitätsbedingungen erhalten dann die Gestalt

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Lambda_{t\varepsilon}^{(\alpha)}}{\partial t}\right)_{t=0,\, \varepsilon=0} = 0. \tag{101}$$

Dabei genügt es, das Anfangsglied von $\Lambda_{t\varepsilon}^{(\alpha)}$ zu berücksichtigen, das einem System von drei Massenpunkten entspricht, welche die Masse m_ν und die Koordinaten

$$x_\nu = x_\nu^0 + \varepsilon \cdot \delta x_\nu + t \cdot \delta_{\mu\nu}, \quad y_\nu = y_\nu^0 + \varepsilon \cdot \delta y_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3) \tag{102}$$

besitzen, wo (x_α^0) die zu ω gehörige Lagrangesche Dreieckskonfiguration ist; S_0^ν sei die Kugel mit dem Mittelpunkt $(x_\nu^0, y_\nu^0, 0)$ vom Volumen $\frac{\mathsf{T}}{3}$, auf die S^ν

[34a]) $d\sigma_t^{(\alpha)}$ ist das Flächenelement auf $S_t^{(\alpha)}$, $d\sigma_0$ später das Flächenelement auf S_0.

bezogen sei; dann ist

$$\delta x_\alpha = U_\alpha = \frac{3}{\mathsf{T}} \int_{S_0^\nu} u(X - x_\nu^0)\, d\sigma_0, \quad \frac{3}{\mathsf{T}} \int_{S_0^\nu} u(Y - y_\nu^0)\, d\sigma_0$$

($\alpha = 1, \ldots, 6$; $\nu = 1, 2, 3$). Das zu $t = 0$ gehörige Relativpotential heiße Λ_*. Der Ableitung nach t entspricht dann $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ und die Orthogonalitätsrelationen werden

$$\delta \frac{\partial \Lambda_*}{\partial x_\alpha} = O(\mathsf{L}^{-4}). \tag{103}$$

Nach rechts sind gekommen die mit $u_0^{(\nu)} = O(\mathsf{L}^{-2})$ multiplizierten Anfangsglieder, die konstant und von der Ordnung $O(\mathsf{L}^{-2})$ sind, sowie die mit $u_z^{(\nu)} = O(\mathsf{L}^{-1})$ multiplizierten Glieder von der Ordnung $O(\mathsf{L}^{-3})$. Diese sowie die mit $\xi, \eta = O(\mathsf{L}^{-1})$ und $\zeta = O(\mathsf{L}^{-3})$ und seinen Ableitungen multiplizierten Terme aus (101) geben sämtlich Glieder $O(\mathsf{L}^{-4})$.

Durch diese Betrachtungen wird plausibel gemacht (was auch leicht durch genaue Berechnung der in Betracht kommenden Entwicklungen sichergestellt werden könnte), daß die Orthogonalitätsrelationen nach Division mit L^{-3} die Form haben:

$$l_\alpha(U_\beta) \equiv \sum_\beta a_{\alpha\beta} U_\beta = O(\mathsf{L}^{-1}), \tag{104}$$

wo $l_\alpha(U_\beta)$ die schon oben betrachteten Linearformen auf der linken Seite der zur Dreieckslösung gehörigen (durch L^{-3} durchdividierten) Jacobischen Gleichungen sind.

Aus der auf S. 214 ff. angestellten Untersuchung der Nullösungen folgt

$$U_\alpha = r d_\alpha + O(\mathsf{L}^{-1}) \quad \text{mit} \quad r = \sum U_\alpha d_\alpha. \tag{105}$$

Jede Nullösung $u \not\equiv u_2$ kann orthogonal zu u_2 und normiert angenommen werden:

$$\int_S g u u_2 d\sigma = 0, \qquad -\int_S g u^2 d\sigma = 1. \tag{106}$$

Hier ist

$$g = -\frac{4\pi \mathfrak{r} f^2}{3} + O(\mathsf{L}^{-1}), \tag{107}$$

ferner $u_2 = Xb - Ya$ oder auf S^ν entwickelt (mit $\tilde{x}_\alpha^0 = x_\alpha^0 \cdot \mathsf{L}^{-1}$):

$$u_2 = -y_\nu^0 \frac{X - x_\nu^0}{\mathfrak{r}} + x_\nu^0 \frac{Y - y_\nu^0}{\mathfrak{r}} + O(1) \tag{108}$$

$$= \frac{\mathsf{L}}{\mathfrak{r}} (-\tilde{y}_\nu^0 (X - x_\nu^0) + \tilde{x}_\nu^0 (Y - y_\nu^0) + O(\mathsf{L}^{-1})). \tag{109}$$

Somit folgt aus (106)

$$r = \sum_\alpha U_\alpha d_\alpha = O(\mathsf{L}^{-1}) \tag{110}$$

und weiter aus (105)

$$U_\alpha = O(\mathsf{L}^{-1}). \tag{111}$$

Gäbe es nun für beliebig kleine L^{-1} stets eine normierte Nullösung $u \not\equiv u_1, u_2$, so ginge für eine gegen 0 konvergierende L^{-1}-Folge das zugehörige

$$u \Rightarrow u^0 \equiv \sum_\alpha c_\alpha u_\alpha^0 \quad \text{mit} \quad c_\alpha = -\int_{S_0} g^0 u_\alpha^0 u^0 \, d\sigma_0, \tag{112}$$

wo sich der obere Index 0 auf die ruhenden Ausgangskugeln S_0 bezieht, und es wäre

$$\sum_\alpha c_\alpha^2 = 1. \tag{113}$$

Das ist aber unmöglich, da c_α bis auf den Faktor $\frac{4\pi}{3} r^{\frac{3}{2}} f$ Limes von U_α, also $= 0$ sein müßte.

Damit ist gezeigt: die homogene Integralgleichung $L(u) = 0$ auf S besitzt außer den beiden trivialen Nullösungen u_1, u_2 keine weiteren. T ist also keine Verzweigungsfigur; wenn wir T als Ausgangsfigur nehmen, befinden wir uns im regulären Fall.

Wir wollen nun von T zu benachbarten Gleichgewichtsfiguren T_1 in der Weise übergehen, daß wir dabei die Winkelgeschwindigkeit ω festhalten. Unabhängige Parameter sind dann die Werte $s^{(\nu)}$, welche die komponentenweise konstante Funktion s auf den drei Randkomponenten S^ν annimmt. Vollständige Einsicht in die Natur der (trivialen) Verzweigungsgleichungen liefert wieder die Beachtung der Invarianz der Lagrangeschen Funktion gegenüber Translation längs der Rotationsachse und Drehung um diese. Auf Symmetriebetrachtungen kann man sich im allgemeinen Fall, wo man die $s^{(\nu)}$ auch alle voneinander verschieden werden läßt, nicht berufen. Genau wie auf S. 209 zeigt sich, wir können r_1 und r_2 beliebige (hinreichend kleine) Werte beilegen, etwa $r_1 = 0$, $r_2 = 0$.

Es erübrigt jetzt nur noch zu zeigen, daß man die Parameter $s^{(\nu)}$ so wählen kann, daß die Volumina der drei Massen gegenüber dem gemeinsamen Ausgangswert $\frac{\mathsf{T}}{3}$ beliebig vorgebbare (kleine) Zuwüchse erhalten. Wenn wir so die Massen (wenig) voneinander verschieden machen können, haben wir (schwach) unsymmetrische Gleichgewichtsfiguren hergestellt.

Die Behandlung dieser Frage ist von Herrn Lichtenstein[35]) (für zwei Einzelmassen) skizziert worden. Die Antwort hängt vom Nichtverschwinden einer Determinante ab, die wir aber mittels unserer Integralgleichungen (90) explizit angeben können. Die Verallgemeinerung auf drei Einzelmassen macht nicht die geringsten Schwierigkeiten.

---

[35]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) II, S. 165 f.

Die Zuwüchse der Volumina sind

$$\int_0^1 dt \int_{S_t^\nu} \zeta \cos\varphi_t \, d\sigma_t = \delta v_\nu, \tag{114}$$

also bis auf Glieder zweiter und höherer Ordnung (in den $s^{(\nu)}$)

$$\int_{S^\nu} \zeta \, d\sigma + (s)_2 = \delta v_\nu. \tag{115}$$

Nun ist die zu $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ gehörige Lösung der fundamentalen Integrodifferentialgleichung auf S mittels des zu $\frac{1}{g} N_* = \frac{1}{g} K - g'(u_1 u_1' + u_2 u_2')$ gehörigen lösenden Kernes H

$$\zeta = \frac{s}{g} - \int_S H \frac{s'}{g'} \, d\sigma' - \lambda \left(\frac{X^2 + Y^2}{g} - \int_S H \frac{X'^2 + Y'^2}{g'} \, d\sigma' \right) + \ldots, \tag{116}$$

also für $\lambda = 0$

$$\zeta = \frac{s}{g} - \int_S s' \frac{H}{g'} \, d\sigma' + (s)_2. \tag{117}$$

Den Integralausdruck auf der rechten Seite wirklich zu berechnen, rekurrieren wir auf die Integralgleichungen

$$L(p_\nu) = 2 C_\nu + O(\mathsf{L}^{-1}); \quad C_\nu = C \text{ auf } S^\nu \text{ und } = 0 \text{ auf } S - S^\nu. \tag{90}$$

Die Lösung besitzt die Form

$$p_\nu = -\sum_{\alpha=1}^{2} u_\alpha \int_S g' u_\alpha' p_\nu' \, d\sigma' + \frac{2 C_\nu}{g} - \int_S H \frac{2 C_\nu'}{g'} \, d\sigma' + O(\mathsf{L}^{-1}). \tag{118}$$

Wir bilden nun die Funktion

$$\frac{\sum s^{(\nu)} p_\nu}{2C} = \frac{sp}{2C}, \text{ wo } \sum C_\nu = C \text{ konstant auf } S, \ \sum s^{(\nu)} C_\nu = s C \tag{119}$$

ist. Dann wird, wenn wir die Gleichungen (118) mit $s^{(\nu)}$ multiplizieren und addieren,

$$\frac{sp}{2C} = -\sum_\alpha u_\alpha \int_S g' u_\alpha' \frac{s' p'}{2C} \, d\sigma' + \frac{s}{g} - \int_S H \frac{s'}{g'} \, d\sigma' + \frac{(s)_1}{2C} O(\mathsf{L}^{-1}). \tag{120}$$

Also ist

$$\zeta = \frac{sp}{2C} + \sum_\alpha u_\alpha M_\alpha + (s)_1 O(\mathsf{L}^{-1}) + (s)_2, \tag{121}$$

wo M_α zur Abkürzung für die in (120) ausgeschriebenen Integrale eingeführt ist.

Nunmehr ergeben mit Rücksicht auf

$$\int_{S^\nu} u_\alpha \, d\sigma = 0 \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{122}$$

die Gleichungen (115)

$$(123) \qquad \sum_{\nu} \left[\frac{\mathsf{T}}{2C} \delta_{\mu\nu} + O(\mathsf{L}^{-1}) \right] s^{(\nu)} = \delta v_{\mu} + (s)_2 .$$

Für große L verschwindet die Koeffizientendeterminante der Linearformen in $s^{(\nu)}$ sicher nicht. Wir können also die $s^{(\nu)}$ eindeutig so bestimmen, daß willkürlich vorgebbare δv_{μ} zum Vorschein kommen, wofern letztere nur hinreichend klein sind.

Damit ist aber die Existenz einer aus drei voneinander verschiedenen Einzelmassen bestehenden Gleichgewichtsfigur, die keine Symmetrieebene durch die Rotationsachse besitzt, von neuem bewiesen.

Zweiter Teil. Periodische Lösungen.

III. Periodische Lösungen erster Art im Mehrkörperproblem.

III 1. Problemstellung.

Wir betrachten die Bewegung von $k+1$ Massenpunkten mit den Massen $M, m_1, \ldots, m_k$ unter dem Einfluß der gegenseitigen Newtonschen Gravitationskräfte. Man weiß, dieses Problem ist bei Einführung geeigneter, auf Lagrange und Jacobi zurückgehenden Koordinaten äquivalent mit folgendem:

Im Raume der kartesischen Koordinaten x, y, z bewegen sich k fiktive Punkte $P_{\nu}(x_{\nu}\, y_{\nu}\, z_{\nu})$, $\nu = 1, \ldots, k$, von der Masse

$$(1) \qquad \lambda_{\nu} = \frac{m_{\nu} M_{\nu-1}}{M_{\nu}}; \qquad M_{\nu} = M + m_1 + \ldots + m_{\nu}, \qquad M_0 = M$$

unter dem Einfluß der Kräftefunktion

$$(2) \qquad U = \varkappa M \sum\nolimits'_{\nu} \frac{m_{\nu}}{r'_{\nu}} + \varkappa \sum\nolimits'_{\mu\nu} \frac{m_{\nu} m_{\mu}}{r'_{\mu\nu}} \equiv U'_0 + U_* ;$$

dabei berechnet sich aus den Koordinaten $(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu})$

$$(3) \qquad \begin{aligned} r'^2_{\nu} &= \Big(x_{\nu} + \sum_{1}^{\nu-1}{}_{\mu} \frac{m_{\mu}}{M_{\mu}} x_{\mu} \Big)^2 + \ldots , \\ r'^2_{\mu\nu} &= \Big(\Big[x_{\mu} + \sum_{1}^{\mu-1}{}_{\lambda} \frac{m_{\lambda}}{M_{\lambda}} x_{\lambda} \Big] - \Big[x_{\nu} + \sum_{1}^{\nu-1}{}_{\lambda} \frac{m_{\lambda}}{M_{\lambda}} x_{\lambda} \Big] \Big)^2 + \ldots , \end{aligned}$$

wo beide Male zwei analoge Terme in y und z hinzukommen. $\varkappa$ ist die Gaußsche Gravitationskonstante.

Die Lagrangesche Funktion dieses Bewegungsproblems wird

$$(4) \qquad \Lambda = T + U ,$$

wo

$$T = \sum_1^k{}_\nu T_\nu = \sum_1^k{}_\nu \frac{\lambda_\nu}{2}(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2) \tag{5}$$

die kinetische Energie ist; der Punkt bedeutet die Ableitung nach der Zeit t.

Wir stellen uns die Aufgabe, auf Grund der sich sukzessiver Approximationen bedienenden Methode der Integrodifferentialgleichungen mit einer Greenschen Funktion[36]) für das eben charakterisierte mechanische Problem periodische Lösungen erster Art (Sorte) (solutions de la première sorte im Sinne von Poincaré) zu ermitteln, wobei die Ausgangslösungen der Schar Keplersche Kreise sind, die in derselben Ebene liegen, und die „gestörte" Bewegung gleichfalls eine ebene ist; doch können wir mit derselben Mühe auch den Fall betrachten, wo die „gestörte" Bewegung bereits (kleine) Neigungen aufweist.

Die bei dieser Fragestellung zugrunde gelegte periodische Ausgangsbewegung ist genauer die folgende[37]): In konzentrischen, in der xy-Ebene gelegenen Kreisen vom Radius a_ν $(a_1 < a_2 < \ldots < a_k)$ um den Ursprung, in dem die Masse M ruht, bewegen sich die mit der Masse Null behaftet gedachten Punkte $P_1^0, \ldots, P_k^0$ mit den durch das dritte Keplersche Gesetz $n_\nu^2 a_\nu^3 = \varkappa M$ gegebenen mittleren Bewegungen n_ν. Nach Ablauf der Zeit T soll die Konfiguration wieder dieselbe sein: das ganze System (P_ν^0) hat sich nur um den Winkel $n_k \mathsf{T}$ um die z-Achse gedreht. Wir setzen

$$n_k \mathsf{T} = q_k \cdot 2\pi, \quad n_\nu \mathsf{T} = (q_k + p_\nu) \cdot 2\pi = q_\nu \cdot 2\pi \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1); \tag{6}$$

hierbei ist p_ν eine ganze Zahl. Wir verabreden noch, $p_k = 0$ zu setzen, dann gilt die zweite Gleichung (6) allgemein für $\nu = 1, \ldots, k$. Wir können voraussetzen, daß die $p_1, \ldots, p_{k-1}$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Wäre nämlich ihr größter gemeinsamer Teiler $d > 1$, also $p_\nu = p_\nu' \cdot d$, p_ν' ganz, so setze man $q_k = q_k' \cdot d$ und man hat schon für die Periode $\mathsf{T}' = \frac{\mathsf{T}}{d}$ Beziehungen, die zu (6) analog sind. Unter T wollen wir aber die primitive Periode mit $d = 1$ verstehen. Wir bemerken noch: die synodischen Perioden sind $\frac{2\pi}{n_\nu - n_k} = \frac{\mathsf{T}}{p_\nu}$ und es gilt $\frac{n_\nu - n_k}{p_\nu} = \frac{n_\mu - n_k}{p_\mu}$, also[38])

$$p_\mu n_\nu - p_\nu n_\mu + (p_\nu - p_\mu) n_k = 0, \qquad \nu < \mu < k. \tag{7}$$

Endlich setzen wir

$$\mathsf{n} = \frac{2\pi}{\mathsf{T}} = \frac{n_k}{q_k} = \frac{n_\nu - n_k}{p_\nu}, \tag{8}$$

[36]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [2]) IV, V.

[37]) Vgl. den Artikel von F. L. Griffin bei F. R. Moulton, loc. cit. [7]), S. 425—456.

[38]) Im Falle $k = 3$ ist das Bestehen der linearen ganzzahligen Relation (7) auch hinreichend für die Periodizität der Ausgangsbewegung, vgl. H. Poincaré, loc. cit. [6]) S. 154—156.

dann variiert die Variable

$$\tau = \mathfrak{n}\, t \tag{9}$$

in der Zeit T um 2π; für die relativen mittleren Bewegungen gilt $(n_\nu - n_k)\,t = p_\nu \tau$. Die Koordinaten von P_ν^0 sind

$$x_\nu^0 = a_\nu \cos\varphi_\nu^0, \quad y_\nu^0 = a_\nu \sin\varphi_\nu^0, \quad z_\nu^0 = 0; \quad \varphi_\nu^0 = n_\nu t + \vartheta_\nu = q_\nu \tau + \vartheta_\nu \tag{10}$$
$$(a_\nu, \vartheta_\nu \text{ konstant}).$$

Wir suchen nun für

$$m_\nu = \mu \beta_\nu, \quad \mu \text{ kleiner Parameter}, \tag{11}$$

in der Nachbarschaft von (10) nach periodischen Bewegungen des Systems (4), bei denen nach Ablauf derselben Periode T das System (P_ν) wieder die alte Konfiguration besitzt, sich aber in einer um denselben Winkel $q_k \cdot 2\pi$ um die z-Achse gedrehten Lage befindet. Zu diesem Zweck beziehen wir die gesuchte Bewegung von P_ν auf die als Ausgangsbewegung dienende Bewegung von P_ν^0, d. h. wir führen als neue Koordinaten von P_ν die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{P_\nu^0 P_\nu}$ ein, genommen in dem Achsenkreuz $x^{(\nu)} y^{(\nu)} z^{(\nu)}$, dessen $z^{(\nu)}$-Achse mit der z-Achse zusammenfällt, während die $x^{(\nu)}$-Achse ständig durch P_ν^0 hindurchgeht; dieses System $x^{(\nu)} y^{(\nu)} z^{(\nu)}$ besitzt also die Winkelgeschwindigkeit n_ν. Wir führen somit als neue Koordinaten $\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ des Punktes P_ν ein[38a]):

$$\begin{aligned} a_\nu + \xi_\nu &= \;\; x_\nu \cos\varphi_\nu^0 + y_\nu \sin\varphi_\nu^0 = x_\nu^{(\nu)}, \\ \eta_\nu &= -x_\nu \sin\varphi_\nu^0 + y_\nu \cos\varphi_\nu^0 = y_\nu^{(\nu)}, \\ \zeta_\nu &= z_\nu \qquad\qquad\qquad\quad = z_\nu^{(\nu)}; \end{aligned} \tag{12}$$

umgekehrt ist

$$\begin{aligned} x_\nu &= a_\nu \cos\varphi_\nu^0 + \xi_\nu \cos\varphi_\nu^0 - \eta_\nu \sin\varphi_\nu^0, \\ y_\nu &= a_\nu \sin\varphi_\nu^0 + \xi_\nu \sin\varphi_\nu^0 + \eta_\nu \cos\varphi_\nu^0, \\ z_\nu &= \zeta_\nu. \end{aligned} \tag{13}$$

Um jetzt die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für diese Koordinaten $\xi_\nu \eta_\nu \zeta_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k)$, die wir auch gleichförmig mit ξ_α $(\alpha = 1, \ldots, 3k = N)$ bezeichnen, aufzustellen, haben wir die Lagrangesche Funktion $\Lambda = \Lambda(\xi_\alpha, \dot\xi_\alpha, t)$ als Funktion der (generalisierten) Koordinaten, Geschwindigkeiten und der Zeit selbst zu berechnen.

Das Quadrat der Absolutgeschwindigkeit (= Relativgeschwindigkeit gegen $x^{(\nu)} y^{(\nu)} z^{(\nu)}$ plus Mitführungsgeschwindigkeit) ist für P_ν

$$\dot x_\nu^2 + \dot y_\nu^2 + \dot z_\nu^2 = \dot\xi_\nu^2 + \dot\eta_\nu^2 + \dot\zeta_\nu^2 + 2 n_\nu (x_\nu^{(\nu)} \dot\eta_\nu - y_\nu^{(\nu)} \dot\xi_\nu) + n_\nu^2 ((x_\nu^{(\nu)})^2 + (y_\nu^{(\nu)})^2), \tag{14}$$

[38a]) Die vorübergehend auftretenden kartesischen Koordinaten des Punktes P_ν im System $x^{(\nu)} y^{(\nu)} z^{(\nu)}$ heißen $x_\nu^{(\nu)}, y_\nu^{(\nu)}, z_\nu^{(\nu)}$.

also

$$(15)\quad \frac{1}{2}(\dot{x}_\nu^2+\dot{y}_\nu^2+\dot{z}_\nu^2)=\frac{1}{2}n_\nu^2 a_\nu^2+(n_\nu a_\nu \dot{\eta}_\nu+n_\nu^2 a_\nu \xi_\nu)$$
$$+\frac{1}{2}(\dot{\xi}_\nu^2+\dot{\eta}_\nu^2+\dot{\zeta}_\nu^2)+n_\nu(\xi_\nu\dot{\eta}_\nu-\eta_\nu\dot{\xi}_\nu)+\frac{1}{2}n_\nu^2(\xi_\nu^2+\eta_\nu^2).$$

Wegen $\lambda_\nu = m_\nu\left(1-\frac{m_\nu}{M_\nu}\right)$ gilt außerdem

$$(16)\qquad T=\sum_\nu \frac{m_\nu}{2}(\dot{x}_\nu^2+\dot{y}_\nu^2+\dot{z}_\nu^2)-T_*,\qquad T_*=\sum_\nu \frac{m_\nu}{M_{\nu-1}}T_\nu.$$

Wir führen weiter ein

$$(17)\qquad r_\nu^2=x_\nu^2+y_\nu^2+z_\nu^2=a_\nu^2+2a_\nu\xi_\nu+\xi_\nu^2+\eta_\nu^2+\zeta_\nu^2,$$

dann bekommt man für die Kräftefunktion die Zerlegung

$$(18)\qquad U=U_0+U_*+U_{**}$$

mit

$$(19)\qquad U_0=\varkappa M\sum_\nu \frac{m_\nu}{r_\nu},$$

$$(20)\qquad U_*=\varkappa\sum_{\mu\nu}\frac{m_\nu m_\mu}{r'_{\mu\nu}},\qquad U_{**}=U_0'-U_0=\varkappa M\sum_\nu m_\nu\left(\frac{1}{r'_\nu}-\frac{1}{r_\nu}\right).$$

Nach Potenzen von $\xi_\nu\,\eta_\nu\,\zeta_\nu$ entwickelt, ergibt sich

$$(21)\qquad U_0=\sum_{p=0}^{\infty}U_0^{(p)},$$
$$U_0^{(p)}=\frac{1}{p!}\varkappa M\sum_\nu\frac{m_\nu}{a_\nu}\left[\frac{\partial^p}{\partial h^p}\left(1+2\frac{\xi_\nu}{a_\nu}h+\frac{\xi_\nu^2+\eta_\nu^2+\zeta_\nu^2}{a_\nu^2}h^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_{h=0};$$

hier bedeutet h einen Parameter; die Entwicklung (21) ist bekanntlich für alle ξ_ν, η_ν, ζ_ν mit $\sqrt{\xi_\nu^2+\eta_\nu^2+\zeta_\nu^2}\leqq\alpha a_\nu$, $\alpha<1$, absolut und gleichmäßig konvergent. Es ist

$$(22)\qquad U_0^{(0)}=\varkappa M\sum_\nu\frac{m_\nu}{a_\nu},$$
$$U_0^{(1)}=-\varkappa M\sum_\nu\frac{m_\nu}{a_\nu}\frac{\xi_\nu}{a_\nu},\quad U_0^{(2)}=\varkappa M\sum_\nu\frac{m_\nu}{a_\nu}\left(\frac{\xi_\nu^2}{a_\nu^2}-\frac{1}{2}\frac{\eta_\nu^2+\zeta_\nu^2}{a_\nu^2}\right),$$

und wir setzen

$$^{(3)}U_0=\sum_{p=3}^{\infty}U_0^{(p)}.$$

Da wir, wie oben angegeben, die a_ν so gewählt denken, daß sie mit den n_ν nach dem dritten Keplerschen Gesetz zusammenhängen, sind die Lagrangeschen Ableitungen von Λ, das sind die linken Seiten der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$(23)\qquad \Lambda_\alpha\equiv\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\xi}_\alpha}-\frac{\partial\Lambda}{\partial\xi_\alpha}=0\qquad(\alpha=1,\ldots,N),$$

zugleich einfach die Lagrangeschen Ableitungen Λ_α^* der Funktion

$$\Lambda^* = \frac{1}{2} Q + S; \tag{24}$$

$$Q = \sum_\nu m_\nu \left[(\dot\xi_\nu^2 + \dot\eta_\nu^2 + \dot\zeta_\nu^2) + 2 n_\nu (\xi_\nu \dot\eta_\nu - \eta_\nu \dot\xi_\nu) + n_\nu^2 (3\xi_\nu^2 - \zeta_\nu^2) \right], \tag{25}$$

$$S = - T_* + U_* + U_{**} + {}^{(3)}U_0 . \tag{26}$$

Λ^* unterscheidet sich von Λ nur um $\sum m_\nu \left(\frac{3}{2} n_\nu^2 a_\nu^2 + n_\nu a_\nu \dot\eta_\nu \right)$ und kann daher ebensogut wie Λ als Lagrangesche Funktion unseres mechanischen Problems betrachtet werden.

Im Hinblick auf die Herstellung unserer periodischen Lösungen wollen wir die Gleichungen $\Lambda_\alpha^* = 0$ noch dahin umformen, daß wir darin $\tau = \mathsf{n} t$ statt t als unabhängige Variable einführen, nachdem wir sie noch durch n^2 durchdividiert haben. So ergeben sich die Gleichungen

$$\bar\Lambda_\alpha \equiv \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar\Lambda}{\partial \xi_\alpha'} - \frac{\partial \bar\Lambda}{\partial \xi_\alpha} = 0 \qquad \left(\xi_\alpha' = \frac{d}{d\tau} \xi_\alpha \right) \tag{27}$$

mit der Lagrangeschen Funktion

$$\bar\Lambda = \frac{1}{2} \bar Q + \bar S;$$

$$\bar Q = \sum_\nu m_\nu \left[(\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2 + \zeta_\nu'^2) + 2 q_\nu (\xi_\nu \eta_\nu' - \eta_\nu \xi_\nu') + q_\nu^2 (3\xi_\nu^2 - \zeta_\nu^2) \right], \quad \bar S = \frac{S}{\mathsf{n}^2}. \tag{28}$$

Wir wollen noch, falls die Koordinate ξ_α zu P_ν gehört, $m_\alpha = m_\nu$ setzen und bringen schließlich unsere Differentialgleichungen auf die Form

$$Y_\alpha \equiv L_\alpha - F_\alpha = 0 \tag{29}$$

mit

$$L = \frac{1}{2} \sum_\nu \left[(\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2 + \zeta_\nu'^2) + 2 q_\nu (\xi_\nu \eta_\nu' - \eta_\nu \xi_\nu') + q_\nu^2 (3\xi_\nu^2 - \zeta_\nu^2) \right],$$
$$F_\alpha = - \frac{1}{m_\alpha} \bar S_\alpha; \tag{30}$$

L_α und $\bar S_\alpha$ sind die Lagrangeschen Ableitungen der Funktionen L bzw. $\bar S$. Man sieht, es ist

$$Y_\alpha = \frac{1}{m_\alpha} \bar\Lambda_\alpha = \frac{1}{\mathsf{n}^2 m_\alpha} \Lambda_\alpha . \tag{30'}$$

Von den Gleichungen (29) suchen wir im Intervall $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$ eine Lösung $\xi_\alpha = \xi_\alpha(\tau)$, die der Randbedingung der Periodizität genügt:

$$\xi_\alpha(0) = \xi_\alpha(2\pi), \quad \xi_\alpha'(0) = \xi_\alpha'(2\pi).$$

Da F_α, soweit τ explizit vorkommt, ebenfalls eine periodische Funktion von τ mit der Periode 2π ist (vgl. (81), S. 238), bekommen wir in $\xi_\alpha(\tau)$ eine periodische Lösung mit der Periode 2π des Gleichungssystems (29).

III 2. Die linearen Integralidentitäten für die Lagrangeschen Ableitungen.

Aus der Invarianz der Hamiltonschen Wirkung

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda \, dt, \qquad \Lambda = T(\dot{x}_\alpha) + U(x_\alpha) = \Lambda(\xi_\alpha \dot{\xi}_\alpha t) \tag{31}$$

(genommen längs irgendeiner möglichen periodischen Bewegung des Punktsystems (P_ν) während der Periode) gegenüber einer Drehung des Systems um den Ursprung sowie gegenüber einer Verschiebung des Integrationsintervalls folgen für die Lagrangeschen Differentialausdrücke gewisse Integralrelationen, die sich auf beliebige geschlossene periodisch durchlaufene Kurven beziehen[38b]).

Gegeben sei für $t_0 \leqq t \leqq t_1 = t_0 + \mathsf{T}$ eine Kurvenschar

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \bar{x}_\alpha(t, \varepsilon) \qquad \text{bzw.} \qquad \xi_\alpha = \bar{\xi}_\alpha(t, \varepsilon) \\ \dot{x}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial t} \bar{x}_\alpha(t, \varepsilon) \qquad \text{„} \qquad \dot{\xi}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}_\alpha(t, \varepsilon) \end{aligned} \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_1) \tag{32}$$

derart, daß die Randbedingung der Periodizität für alle ε erfüllt ist:

$$\bar{\xi}_\alpha(t_0, \varepsilon) = \bar{\xi}_\alpha(t_1, \varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}_\alpha(t_0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}_\alpha(t_1, \varepsilon) \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_1). \tag{33}$$

Dann wird J eine Funktion $J = J(\varepsilon)$ des Scharparameters ε und die Variationsrechnung gibt die Formel

$$\delta J \equiv \left[\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = -\int_{t_0}^{t_1} \sum \Lambda_\alpha \chi_\alpha \, dt, \tag{34}$$

wo

$$\chi_\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bar{\xi}_\alpha(t, \varepsilon) \right]_{\varepsilon=0} \tag{35}$$

ist.

$$\delta J = 0, \qquad \text{d. h.} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum \Lambda_\alpha \chi_\alpha \, dt = 0 \tag{36}$$

ergibt sich nun zunächst bei folgender Schar: $\bar{x}_\alpha = x_\alpha(t + \varepsilon)$, d. h.

$$\begin{aligned} a_\nu + \bar{\xi}_\nu(t, \varepsilon) &= (a_\nu + \xi_\nu(t + \varepsilon)) \cos n_\nu \varepsilon - \eta_\nu(t + \varepsilon) \sin n_\nu \varepsilon, \\ \bar{\eta}_\nu(t, \varepsilon) &= (a_\nu + \xi_\nu(t + \varepsilon)) \sin n_\nu \varepsilon + \eta_\nu(t + \varepsilon) \cos n_\nu \varepsilon, \\ \bar{\zeta}_\nu(t, \varepsilon) &= \zeta_\nu(t + \varepsilon). \end{aligned} \tag{37}$$

Das sich hier ergebende χ_α bezeichnen wir mit $\chi_\alpha^{(0)}$; es ist in naheliegender Schreibweise

$$\chi_{\xi_\nu}^{(0)} = \dot{\xi}_\nu - n_\nu \eta_\nu, \qquad \chi_{\eta_\nu}^{(0)} = \dot{\eta}_\nu + n_\nu (a_\nu + \xi_\nu), \qquad \chi_{\zeta_\nu}^{(0)} = \dot{\zeta}_\nu. \tag{38}$$

[38b]) $\Lambda(\xi_\alpha \dot{\xi}_\alpha t)$ ist, auch sofern es von t explizit abhängt, periodisch in t mit der Periode T. Wir bezeichnen x_ν, y_ν, z_ν $(\nu = 1, \ldots, k)$ auch gleichförmig mit x_α $(\alpha = 1, \ldots, 3k = N)$.

Neben die sich so ergebende „Energieformel“ treten zweitens drei weitere dem Flächensatz entsprechende Integralformeln (36), wenn wir die durch Drehung einer geschlossenen periodisch durchlaufenen Kurve um den Ursprung entstehenden Scharen betrachten. Die eingliedrige Gruppe der Drehungen des Massenpunktsystems um die z-Achse um den Winkel ε:

$$\begin{aligned} \bar{x}_\nu &= x_\nu \cos\varepsilon - y_\nu \sin\varepsilon, & a_\nu + \bar{\xi}_\nu &= (a_\nu + \xi_\nu)\cos\varepsilon - \eta_\nu \sin\varepsilon, \\ \bar{y}_\nu &= x_\nu \sin\varepsilon + y_\nu \cos\varepsilon, \quad \text{d. h.} & \bar{\eta}_\nu &= (a_\nu + \xi_\nu)\sin\varepsilon + \eta_\nu \cos\varepsilon, \\ \bar{z}_\nu &= z_\nu, & \bar{\zeta}_\nu &= \zeta_\nu \end{aligned} \tag{39}$$

gibt

$$\chi_{\xi\nu}^{(3)} = -\eta_\nu, \qquad \chi_{\eta\nu}^{(3)} = a_\nu + \xi_\nu, \qquad \chi_{\zeta\nu}^{(3)} = 0. \tag{40}$$

Analog erhält man bei den Drehungen um die x- bzw. y-Achse

$$\begin{aligned} \chi_{\xi\nu}^{(1)} &= -\sin\varphi_\nu^0 \cdot \zeta_\nu, \quad \chi_{\eta\nu}^{(1)} = -\cos\varphi_\nu^0 \cdot \zeta_\nu, \\ \chi_{\zeta\nu}^{(1)} &= a_\nu \sin\varphi_\nu^0 + \xi_\nu \sin\varphi_\nu^0 + \eta_\nu \cos\varphi_\nu^0 \end{aligned} \tag{41}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \chi_{\xi\nu}^{(2)} &= \cos\varphi_\nu^0 \cdot \zeta_\nu, \qquad \chi_{\eta\nu}^{(2)} = -\sin\varphi_\nu^0 \cdot \zeta_\nu, \\ \chi_{\zeta\nu}^{(2)} &= -a_\nu \cos\varphi_\nu^0 - \xi_\nu \cos\varphi_\nu^0 + \eta_\nu \sin\varphi_\nu^0. \end{aligned} \tag{42}$$

Aus (36) ergeben sich vermöge (30′) natürlich ganz entsprechende Integralformeln für die Ausdrücke Y_α:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum Y_\alpha m_\alpha \chi_\alpha \, d\tau = 0. \tag{36′}$$

Das wesentlich Neue ist hierbei gegenüber den aus der astronomischen Literatur her bekannten Tatsachen[39]): es ist für die Gültigkeit von (36), (36′) nicht von vornherein vorausgesetzt, daß die Bewegung $\xi_\alpha(t) = \bar{\xi}_\alpha(t, 0)$, die nur periodisch sein muß, den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen genügt. Gerade auf periodische Bewegungen, bei denen dies noch nicht feststeht, werden wir später (36′) anwenden.

III 3. Nullösungen und Greenscher Tensor.

Um nun unser Differentialgleichungssystem

$$L_\alpha(\xi) = F_\alpha \tag{29}$$

durch sukzessive Approximationen mittels eines Greenschen Tensors aufzulösen, ermitteln wir zunächst die Nullösungen, die der Randbedingung der Periodizität genügen:

$$L_\alpha(u) = 0; \qquad u_\alpha(0) = u_\alpha(2\pi), \qquad u_\alpha'(0) = u_\alpha'(2\pi). \tag{43}$$

---

[39]) Vgl. A. Wintner, loc. cit. [8]), S. 287.

Mit Rücksicht auf den durch (30) gegebenen Bau von L sieht man, das System $L_\alpha(\xi)=0$ $(\alpha=1,\ldots,3\nu)$ zerfällt in ν Paare von der Form

$$(44)\qquad \begin{aligned} L_1(\xi_1\xi_2)&\equiv \xi_1''-3q^2\xi_1-2q\xi_2'=0,\\ L_2(\xi_1\xi_2)&\equiv \quad +2q\xi_1'+\xi_2''\quad =0,\end{aligned}\qquad \xi_1=\xi_\nu,\ \xi_2=\eta_\nu;\quad q=q_\nu$$

und ν einzelne Differentialgleichungen von der Form

$$(45)\qquad L_3(\zeta)\equiv\zeta''+q^2\zeta=0,\qquad \zeta=\zeta_\nu;\qquad q=q_\nu.$$

Das zweigliedrige System (44) schreibt man zweckmäßig in Matrizenform, wobei die Multiplikation mit D symbolisch gemeint ist und die Differentiation nach τ bedeuten soll:

$$(46)\qquad (L_{ij})(\xi_i)=(0),\qquad (i,j=1,2)$$

$$(47)\qquad (L_{ij})=\begin{pmatrix} D^2-3q^2 & -2qD\\ 2qD & D^2\end{pmatrix},\qquad (\xi_i)=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix},\qquad (0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Differentiationsmatrix ist

$$(48)\qquad \Delta^0\equiv\det(L_{ij})=D^2(D^2+q^2).$$

Eine (periodische) Nullösung u des Gleichungspaares (46) genügt auch den beiden Gleichungen

$$(49)\qquad \Delta^0 u_i=0\qquad (i=1,2).$$

$\Delta^0 u=0$ besitzt für ganzzahliges $q\neq 0$ die periodischen Nullösungen

$$(50)\qquad u_0^{(0)},\ u_0^{(1)},\ u_0^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\sin q\tau}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos q\tau}{\sqrt{\pi}},$$

außerdem die nichtperiodische Lösung $u_0=\tau$, die mit den drei erstgenannten ein Fundamentalsystem bildet. Unter

$$(51)\qquad (L^{ij})=\begin{pmatrix} D^2 & 2qD\\ -2qD & D^2-3q^2\end{pmatrix}$$

die zu (L_{ij}) gehörige „reziproke“ Matrix verstanden, bekommt man in $L^{i2}u_0^{(h)}$ drei linear unabhängige, der Randbedingung der Periodizität genügende, somit periodische Nullösungen des Systems (L_{ij}), d. h. von (46):

$$(52)\qquad \begin{pmatrix}u_1^{(h)}\\ u_2^{(h)}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos q\tau}{\sqrt{5\pi}} & \frac{\sin q\tau}{\sqrt{5\pi}}\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \frac{-2\sin q\tau}{\sqrt{5\pi}} & \frac{2\cos q\tau}{\sqrt{5\pi}}\end{pmatrix}\qquad (h=0,1,2);$$

die vierte linear unabhängige Lösung $L^{i2}u_0$ genügt nicht der Randbedingung der Periodizität. Dabei haben wir die Nullösungen so normiert, daß

$$\int \sum_{j=1}^{2} u_j^{(h)} u_j^{(k)} \, d\tau = \delta^{hk} = \begin{cases} 0, & h \neq k \\ 1, & h = k \end{cases} \tag{53}$$

gilt. Hierbei und im folgenden ist $\int_0^{2\pi} = \int$ gesetzt.

Bis jetzt haben wir q ganzzahlig vorausgesetzt. Ist q nicht ganz, so ist die Nullösung $u^{(0)}$ nach wie vor vorhanden. Dagegen sind dann $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ einfach wegzulassen.

Ein Fundamentalsystem der Gleichung (45) ist

$$(u_3^{(h)}) = \left(\frac{\cos q\tau}{\sqrt{\pi}} \quad \frac{\sin q\tau}{\sqrt{\pi}} \right) \qquad (h = 1, 2). \tag{54}$$

Für ganzzahliges $q \neq 0$ genügen beide $u_3^{(h)}$ der Randbedingung der Periodizität.

Die periodischen Nullösungen $u_\alpha^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, \ldots, f)$ des Gesamtsystem $L_\alpha(\xi)$ $(\alpha = 1, \ldots, 3k = N)$ erhalten wir, wenn wir für irgendein ν $(\nu = 1, \ldots, k)$ eine periodische Nullösung ξ_ν, η_ν von (44), bzw. eine periodische Nullösung ζ_ν von (45), herausgreifen und ζ_ν, bzw. ξ_ν, η_ν, sowie alle übrigen Koordinaten $\xi_\mu, \eta_\mu, \zeta_\mu$ $(\mu \neq \nu)$ identisch gleich Null setzen. Bezüglich der Anzahl dieser Nullösungen gilt: $f = k$ bzw. $5k$, je nachdem die q_ν nicht ganzzahlig oder ganzzahlig $\neq 0$ sind. Es ist

$$\int \sum_{\alpha} u_\alpha^{(\varrho)} u_\alpha^{(\sigma)} \, d\tau = \delta^{\varrho\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, f). \tag{55}$$

Jetzt wird der zu dem Differentialsystem $L_\alpha(\xi)$ $(\alpha = 1, \ldots, N)$ gehörige Greensche Tensor[40]) (im erweiterten Sinne) eingeführt, d. h. die $N \times N$-Matrix von Funktionen

$$G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}(\tau, \underline{\tau}) \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, N), \tag{56}$$

die von zwei Argumenten $\tau, \underline{\tau}$ abhängen und folgende Eigenschaften haben: Sie sind als Funktionen von τ im Intervall $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$ durchaus stetig, besitzen aber für $\tau = \underline{\tau}$ einen Knick derart, daß $DG_{\alpha\beta}(\underline{\tau} + 0, \tau) - DG_{\alpha\beta}(\tau - 0, \underline{\tau}) = -\delta_{\alpha\beta}$ ausfällt[41]). Die Spalte $G_{1\beta} \ldots G_{N\beta}$ $(\beta = 1, \ldots, N)$ genügt ferner als Funktion von τ für $\tau \neq \underline{\tau}$ dem Differentialgleichungssystem

$$L_\alpha(G_{1\beta}, \ldots, G_{N\beta}) = \sum_{\varrho=1}^{f} u_\alpha^{(\varrho)} \underline{u}_\beta^{(\varrho)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, N), \tag{57}$$

der Randbedingung

$$G_{\alpha\beta}(0, \underline{\tau}) = G_{\alpha\beta}(2\pi, \underline{\tau}); \quad DG_{\alpha\beta}(0, \underline{\tau}) = DG_{\alpha\beta}(2\pi, \underline{\tau}) \tag{58}$$

[40]) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 206—212. Leipzig und Berlin 1912.

[41]) Wegen der Formulierung im Falle, daß die Matrix der Koeffizienten von D^2 nicht die Einheitsmatrix ist, vgl. S. 245.

sowie der Orthogonalitätsrelation

$$\int \sum_{\gamma} u_{\gamma}^{(\varrho)} G_{\gamma\beta}\, d\tau = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, f;\ \beta = 1, \ldots, N). \tag{59}$$

Hierdurch ist $G_{\alpha\beta}$ eindeutig charakterisiert.

Dieser Greensche Tensor $G_{\alpha\beta}$ des Gesamtsystems setzt sich aus den zweigliedrigen Greenschen Tensoren $G_{ij}^{(\nu)}$ der zu den k Planeten gehörigen Gleichungspaare (44) und aus den eingliedrigen Greenschen Matrizen (Funktionen) $G_{q_\nu^2}$ der k Gleichungen (45) in der Weise zusammen, daß $G_{\alpha\beta}$ dann und nur dann nicht identisch gleich Null ist, wenn α, β sich auf Variable ξ_α, $\xi_\beta = \xi_\nu$, η_ν bzw. $\xi_\alpha = \xi_\beta = \zeta_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ beziehen; dann stimmt $G_{\alpha\beta}$ mit der betreffenden Tensorkomponente des ν-ten zweigliedrigen Systems (44) bzw. mit der Greenschen Funktion der ν-ten Gleichung (45) überein.

Diese 2×2- bzw. 1×1-Tensoren $G_{ij}^{(\nu)}$ bzw. $G_{q_\nu^2}$ lassen sich in unserem Fall, wo die Differentialgleichungen konstante Koeffizienten haben, leicht explizit angeben, worauf wir später (S. 251) näher eingehen wollen.

Man findet, falls q_ν nicht ganz ist, $(G_{ij}) =$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3\pi q^2} - \dfrac{\cos q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{2q \sin q\pi} & \dfrac{1}{\pi q}(\tau - \underline{\tau} \pm \pi) - \dfrac{\sin q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{q \sin q\pi} \\ -\dfrac{1}{\pi q}(\tau - \underline{\tau} \pm \pi) + \dfrac{\sin q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{q \sin q\pi} & \dfrac{2}{\pi q^2} - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{4\pi}(\tau - \underline{\tau})(\tau - \underline{\tau} \pm 2\pi) - 2\dfrac{\cos q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{q \sin q\pi} \end{pmatrix}$$

$$G_{q^2} = -\frac{\cos q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{2q \sin q\pi}, \qquad \pm 1 = \frac{\underline{\tau} - \tau}{|\underline{\tau} - \tau|}; \tag{60}$$

hier haben wir überall den Index ν unterdrückt.

Wie bekannt und übrigens auch aus den später S. 246 folgenden etwas allgemeineren Betrachtungen bei nicht sich selbst adjungierten Systemen ersichtlich ist, hat man nun mit diesem Greenschen Tensor $G_{\alpha\beta}$ folgendes:

Es sei für das zweimal stetig differenzierbare Funktionensystem (ξ_α), das der Randbedingung der Periodizität genügt, das inhomogene Gleichungssystem (29)

$$L_\alpha(\xi) = F_\alpha \tag{61}$$

erfüllt. Dann folgt aus der Greenschen Formel mit Hilfe des eben definierten Greenschen Tensors, daß

$$\xi_\alpha = \overset{\circ}{\sum} r^{(\varrho)} u_\alpha^{(\varrho)} - \int \sum_{\beta} G_{\alpha\beta} \underline{F}_\beta\, d\underline{\tau} \tag{62}$$

ist mit

$$r^{(\varrho)} \equiv \int \sum_{\beta} u_\beta^{(\varrho)} \xi_\beta\, d\tau. \tag{63}$$

Umgekehrt, ist die vorletzte Gleichung erfüllt mit irgendwelchen Werten $r^{(\varrho)}$, so gilt zunächst

$$\int \sum_{\beta} u_{\beta}^{(\sigma)} \xi_{\beta} \, d\tau = r^{(\sigma)}; \tag{64}$$

weiter ergibt die Ausführung der Differentialoperation L_{α}:

$$L_{\alpha}(\xi) = F_{\alpha} - \sum^{\varrho} F^{(\varrho)} u_{\alpha}^{(\varrho)}, \tag{65}$$

wo

$$F^{(\varrho)} \equiv \int \sum_{\beta} u_{\beta}^{(\varrho)} F_{\beta} \, d\tau. \tag{66}$$

Außerdem genügt ξ_{α} der Randbedingung der Periodizität.

III 4. Existenzbeweis.

Der Beweis für die Existenz periodischer Lösungen der Differentialgleichungen (29) verläuft nun so: Wir gehen von dem Integrodifferentialgleichungssystem (62) aus; indem wir die $r^{(\varrho)}$ als unbestimmte Parameter auffassen, finden wir durch das bekannte Verfahren der sukzessiven Approximationen[42]) bei gegebenen, dem Betrage nach hinreichend kleinen $\mu, r^{(\varrho)}$ eine (und nur eine) Lösung $\xi_{\alpha}(\tau)$ von (62), die natürlich noch von den Parametern $\mu, r^{(\varrho)}$ abhängt und zwar als Potenzreihe nach $\mu, r^{(\varrho)}$ für genügend kleine Werte $|\mu|, |r^{(\varrho)}|$ sich darstellen läßt. Die so erhaltenen Funktionen ξ_{α} gehören wegen (64) zu den richtigen Parameterwerten $r^{(\varrho)}$, genügen dem Gleichungssystem (65), außerdem der Randbedingung der Periodizität.

Die Lagrangeschen Differentialgleichungen (29) $Y_{\alpha} \equiv L_{\alpha} - F_{\alpha} = 0$ werden also durch das Funktionensystem ξ_{α} dann und nur dann erfüllt,

[42]) Zum Beweise der Konvergenz des Verfahrens, sowie der Unität, hat man zu benutzen, daß für

$$|\mu| < \mu^*; \quad |\xi_{\gamma}|, |\xi_{\gamma}'|, |\xi_{\gamma}''| < \varepsilon < \varepsilon^* \qquad (\mu^*, \varepsilon^*, \varepsilon \text{ konstant})$$

die rechten Seiten $F_{\alpha} = F_{\alpha}(\mu; \tau; \xi_{\gamma}, \xi_{\gamma}', \xi_{\gamma}'')$ Ungleichheiten von der Form

$$|F_{\alpha}| < C(|\mu| + \varepsilon^2), \quad \left|\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \xi_{\gamma}}\right|, \left|\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \xi_{\gamma}'}\right|, \left|\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \xi_{\gamma}''}\right| < C(|\mu| + \varepsilon) \qquad (C = C(\mu^*, \varepsilon^*) \text{ konstant})$$

genügen. Vergl. die unter [2]) IV, V genannten Abhandlungen, vor allem aber L. Lichtenstein, Zur Variationsrechnung (1. Mitteilung), Göttinger Nachrichten 1919, S. 161—192, insbesondere S. 171—175. Die entsprechenden Betrachtungen im zweidimensionalen Fall (Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. I. Monatshefte für Mathematik und Physik **28** (1917), S. 3—51; II. Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 26—51) sind eine Verallgemeinerung eines von A. Korn (Berliner Abhandlungen, Math.-Phys. Klasse, Anhang 1909) und unabhängig von ihm von Ch. H. Müntz (Journ. für Math. **139** (1910), S. 5—32) geführten Existenzbeweises. Die Randbedingungen sind dort freilich andere. Die Verwendung der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne bringt bei uns eine Vereinfachung.

wenn die $r^{(\varrho)}$ nachträglich als Funktionen von μ so bestimmt werden können, daß die „Verzweigungsgleichungen“

$$F^{(\varrho)} = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, f) \tag{67}$$

befriedigt sind.

Da, wie bereits erwähnt, die F_α ebenfalls in τ periodisch sind, soweit es explizit vorkommt, erhalten wir unter der Bedingung (67) in ξ_α wirklich eine periodische Lösung der Bewegungsgleichungen (29).

Zwischen den linken Seiten $F^{(\varrho)}$ dieser Verzweigungsgleichungen bestehen nun lineare Relationen, die aus den auf S. 231 angegebenen Integralsätzen hervorgehen, wenn man in (36′) einträgt

$$Y_\alpha = -\sum^{\varrho} F^{(\varrho)} u_\alpha^{(\varrho)}; \tag{68}$$

dies gibt mit einem beliebigen stetigen, der Randbedingung der Periodizität genügenden Funktionensystem $v_\alpha = v_\alpha(\tau)$ multipliziert, addiert und integriert

$$\int \sum_\alpha Y_\alpha v_\alpha \, d\tau = -\sum^{\varrho} v^{(\varrho)} F^{(\varrho)}, \qquad v^{(\varrho)} \equiv \int \sum_\alpha v_\alpha u_\alpha^{(\varrho)} \, d\tau. \tag{69}$$

Wird

$$v_\alpha = m_\alpha \chi_\alpha^{(l)} \qquad (l = 0, 1, 2, 3)$$

gesetzt, so bekommen wir wegen der Integralsätze (36′) lineare Relationen von der Form[43])

$$0 = \sum^{\varrho} v^{(l,\varrho)} F^{(\varrho)}, \qquad v^{(l,\varrho)} = m^{(\varrho)} \int \sum_\alpha \chi_\alpha^{(l)} u_\alpha^{(\varrho)} \, d\tau \qquad (l = 0, 1, 2, 3). \tag{70}$$

Da nach Voraussetzung (vgl. S. 226) keine zwei der ungestörten Massen sich auf ein und demselben Kreis bewegen, also die q_ν $(\nu = 1, \ldots, k)$ paarweise voneinander verschieden sind, so sind die beiden Relationen (70) für $l = 0, 3$ voneinander linear unabhängig, wenn man die zu den k stets vorhandenen konstanten periodischen Nullösungen gehörigen $F^{(\varrho)}$ (wir denken für den Moment: $\varrho = 1, \ldots, k$) als Unbekannte betrachtet; d. h. je zwei der Gleichungen $F^{(\varrho)} = 0$ $(\varrho = 1, \ldots, k)$ sind von selbst erfüllt, falls alle übrigen Verzweigungsgleichungen befriedigt sind[44]). Es ist nämlich, wie

---

[43]) Es gehört zur Nullösung $(u_\alpha^{(\varrho)})$ die Masse $m^{(\varrho)} = m_\alpha$, falls $u_\alpha^{(\varrho)} \not\equiv 0$.

[44]) Ist z. B. $k = 2$ und $\frac{n_1}{n_2} = \frac{q_2 + 1}{q_2}$, q_2 nicht ganz, so sind also die beiden trivialen Verzweigungsgleichungen von selbst erfüllt analog wie bei den Gleichgewichtsfiguren im regulären Fall, vgl. S. 209. $k = 2$ liegt im restringierten Falle vor, wo in (11) von den beiden β_ν $(\nu = 1, 2)$ das eine $= 0$, das andere $= 1$ ist. Vgl. H. Poincaré, loc. cit. [6]), S. 104. Im restringierten Fall hat man ζ_ν und die zur nichtverschwindenden Planetenmasse gehörigen Koordinaten ξ, η identisch gleich Null zu setzen; der Freiheitsgrad verringert sich auf 2. Gleichzeitig fällt mit der Gruppe der Drehungen die dem Flächensatz entsprechende Identität weg; man hat aber für nicht ganzzahliges q_2 auch nur eine periodische Nullösung.

man aus den Ausdrücken (38), (40) für $\chi_\alpha^{(l)}$ sieht, für hinreichend kleine $|\mu|$, $|r^{(\varrho)}|$ der Rang der Matrix

$$(v^{(l,\varrho)}) \qquad (l = 0, 3;\ \varrho = 1, \ldots, k)$$

gleich 2.

Aus Formel (69) entnehmen wir noch folgende mechanische Interpretation der linken Seiten $F^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, \ldots, f)$ der Verzweigungsgleichungen. Wir setzen jetzt

$$v_\alpha = u_\alpha^{(\sigma)}, \qquad v^{(\varrho)} = \delta^{\varrho\sigma} \tag{71}$$

und bekommen $-F^{(\sigma)} = \int \sum_\alpha Y_\alpha u_\alpha^{(\sigma)}\, d\tau$ oder wegen $m^{(\sigma)} u_\alpha^{(\sigma)} = m_\alpha u_\alpha^{(\sigma)}$ auch

$$-\mathsf{n} m^{(\sigma)} F^{(\sigma)} = \int \sum_\alpha \Lambda_\alpha u_\alpha^{(\sigma)}\, dt. \tag{72}$$

Nun gilt bei festem gegebenen μ in der Lösungsschar

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha(\tau, r^{(\varrho)}) \tag{73}$$

des Integrodifferentialgleichungssystems (62) offenbar

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial r^{(\sigma)}} = u_\alpha^{(\sigma)} - \int \sum_\beta G_{\alpha\beta} \frac{\partial F_\beta}{\partial r^{(\sigma)}}\, d\tau. \tag{74}$$

(72) bedeutet daher wegen

$$\mathsf{n}^{-2} \Lambda_\alpha = m_\alpha Y_\alpha = -\sum^{\varrho} m_\alpha u_\alpha^{(\varrho)} F^{(\varrho)} = -\sum^{\varrho} u_\alpha^{(\varrho)} \cdot m^{(\varrho)} F^{(\varrho)}$$

und wegen der Orthogonalitätsrelationen (59), wenn wir die Hamiltonsche Wirkung

$$\int \Lambda\, dt = J^0(r^{(\varrho)}) \tag{75}$$

längs einer Bewegung der Schar (73) (das Integral erstreckt über die periodisch durchlaufene geschlossene Kurve (73)) einführen:

$$\mathsf{n} m^{(\sigma)} F^{(\sigma)} = \frac{\partial J^0}{\partial r^{(\sigma)}}. \tag{76}$$

Die Verzweigungsgleichungen sind also gleichwertig mit

$$dJ^0 = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial J^0}{\partial r^{(\varrho)}} = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, f). \tag{77}$$

III 5. Beispiel der drei inneren Jupitersatelliten.

Um wenigstens in einem Beispiel auf die Diskussion der Verzweigungsgleichungen etwas genauer einzugehen, nehmen wir speziell an, die q_ν seien nicht ganzzahlig, nach Ablauf der (primitiven) Periode habe sich also das Ausgangssystem der Nullmassen um einen Winkel gedreht, der kein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.

Im folgenden werden wir nur nach solchen periodischen Lösungen von (29) fragen, die gleichzeitige Konjunktionen besitzen, wo also, sagen wir zur Zeit $\tau = 0$, die Planeten auf einer Geraden durch den Ursprung liegen. Es ist klar, daß die Ausgangsbewegung der ungestörten Massen, in deren Nachbarschaft die gesuchten Bewegungen liegen sollen, zur Zeit $\tau = 0$ eine Konjunktion derselben Art besitzen muß.

Nehmen wir etwa $k = 3$ und als Ausgangsbewegung die Kreisbewegung mit

$$\vartheta_1 = \pi, \quad \vartheta_2 = 0, \quad \vartheta_3 = 0; \tag{78}$$

dies entspricht den Verhältnissen bei den drei inneren Jupitersatelliten; dort gilt (7) mit $p_1 = 3$, $p_2 = 1$ [45]): $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$.

In diesem Fall bekommt man durch das oben geschilderte Verfahren der sukzessiven Approximationen, wie sich durch eine Symmetriebetrachtung ergibt, für $\mu \neq 0$ eine periodische Lösung der Bewegungsgleichungen, wenn man $r^{(\varrho)} = 0$ $(\varrho = 1, 2, 3)$ setzt. Es gelte nämlich in einer bestimmten Approximation für sämtliche ν

$$\xi(-\tau) = \xi(\tau), \quad \eta(-\tau) = -\eta(\tau), \quad \zeta(\tau) \equiv 0, \tag{79}$$

was ja für die 0-te Approximation $\xi_\alpha^{(0)} \equiv 0$ sicher erfüllt ist. Dann ist also

$$\xi'(-\tau) = -\xi'(\tau), \quad \eta'(-\tau) = \eta'(\tau), \quad \zeta'(\tau) \equiv 0. \tag{80}$$

In S kommen die η_ν außer in der Verbindung $\xi\eta' - \eta\xi'$ nur quadratisch vor oder aber zusammen mit τ in

$$\begin{aligned} x_\mu x_\nu + y_\mu y_\nu + z_\mu z_\nu = {} & \cos\varphi_{\mu\nu}^0 [(a_\mu + \xi_\mu)(a_\nu + \xi_\nu) + \eta_\mu \eta_\nu] \\ & + \sin\varphi_{\mu\nu}^0 [(a_\mu + \xi_\mu)\eta_\nu - \eta_\mu (a_\nu + \xi_\nu)] + \zeta_\mu \zeta_\nu, \end{aligned} \tag{81}$$

wo

$$\varphi_{\mu\nu}^0 = \varphi_\mu^0 - \varphi_\nu^0 = (p_\mu - p_\nu)\tau + \vartheta_\mu - \vartheta_\nu; \tag{82}$$

außer in diesen Verbindungen tritt τ explizit in S nicht auf. Ist also $\vartheta_\mu - \vartheta_\nu = 0, \pm\pi$, so sieht man leicht, es ist

$$F_{\xi_\nu}(-\tau) = F_{\xi_\nu}(\tau), \quad F_{\eta_\nu}(-\tau) = -F_{\eta_\nu}(\tau), \quad F_{\zeta_\nu}(\tau) \equiv 0, \tag{83}$$

falls ξ_ν, η_ν, ζ_ν die Symmetrieeigenschaft (79) besitzen. Da außerdem

$$G_{ij}(-\tau, -\underline{\tau}) = (-1)^{i+j} G_{ij}(\tau, \underline{\tau}), \quad G_{q^2}(-\tau, -\underline{\tau}) = G_{q^2}(\tau, \underline{\tau}) \tag{84}$$

gilt, so überträgt sich bei $r^{(\nu)} = 0$ die Symmetrieeigenschaft (79) von einer Approximation auf die nächstfolgende und in der Grenze auf die Lösung

[45]) Siehe die Andeutungen bei H. Poincaré loc. cit. [6]) I, S. 154–156; F. L. Griffin, loc. cit. [7]), S. 542.

$\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu$ des Integrodifferentialgleichungssystems (62) mit $r^{(\nu)} = 0$. Für diese gilt also

$$\sqrt{2\pi}\, F^{(\nu)} \equiv \int F_{\eta_\nu}\, d\tau = 0. \tag{85}$$

Die zu $r^{(\nu)} = 0$ gehörige Lösung des Integrodifferentialsystems (62) genügt also auch den Verzweigungsgleichungen, d. h. dem Lagrangeschen Differentialgleichungssystem der Bewegung.

Wir zeigen nun noch, daß die so erhaltene periodische Lösung von (29), bis auf eine Drehung des Systems um die z-Achse und eine Verschiebung des Anfangspunktes der Zeitzählung, die einzige periodische Lösung ist, die eine gleichzeitige Konjunktion besitzt[46]). Für die Parameter $r^{(\nu)}$ ergibt sich nämlich wegen der Periodizität $\eta_\nu(2\pi) = \eta_\nu(0) = {}^0\eta_\nu$

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\, r^{(\nu)} &= \int \eta_\nu\, d\tau = {}^0\eta_\nu \cdot 2\pi - \int \eta'_\nu \tau\, d\tau \\ &= {}^0\eta_\nu \cdot 2\pi + \int\int \sum_\beta G'_{\eta_\nu \beta} F_\beta \cdot \tau\, d\tau\, d\tau, \end{aligned} \tag{86}$$

d. h. mit den Bezeichnungen von S. 224

$$r^{(\nu)} = \sqrt{2\pi} \cdot {}^0\eta_\nu + (\mu)_1 + (\mu, r^{(\varrho)})_2, \tag{87}$$

somit nach $r^{(\nu)}$ aufgelöst:

$$r^{(\nu)} = \sqrt{2\pi} \cdot {}^0\eta_\nu + (\mu)_1 + (\mu, {}^0\eta_\varrho)_2. \tag{88}$$

Falls ${}^0\eta_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, 3)$ ist, kann es also nur eine lineare Reihe $r^{(\nu)} = \mathfrak{P}^{(\nu)}(\mu)$ geben, diese muß $r^{(\nu)} \equiv 0$ sein.

IV. Die Variationsbahn des Mondes.

IV 1. Die Hillschen Bewegungsgleichungen.

Die von der Sonnenparallaxe befreiten Bewegungsgleichungen des restringierten Mondproblems entspringen der Lagrangeschen Funktion

$$\Lambda = \Lambda(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + n'(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{3}{2} n'^2 x^2 + \frac{\mu}{r} \tag{1}$$

und lauten nach Hill[47])

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\equiv \ddot{x} - 2n'\dot{y} - 3n'^2 x + \mu \frac{x}{r^3} = 0 \\ \Lambda_2 &\equiv \ddot{y} + 2n'\dot{x} \qquad\quad + \mu \frac{y}{r^3} = 0; \end{aligned} \tag{2}$$

---

[46]) Ähnliche Betrachtungen bei L. Lichtenstein, vgl. Anm. [12]).

[47]) G. W. Hill, loc. cit. [13]), S. 292. Man vergleiche auch die Darstellung bei H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste. II_2, Paris 1909.

dabei sind x, y die kartesischen Koordinaten des Mondes M in dem mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit n' um die Erde rotierenden System, dessen x-Achse ständig durch die Sonne geht. Es ist weiter $r^2 = x^2 + y^2$, μ die Summe der Massen von Erde und Sonne, noch multipliziert mit der Gaußschen Gravitationskonstante, t die Zeit; die Ableitung nach ihr ist mit einem Punkt bezeichnet.

Multiplikation von Λ_1, Λ_2 mit $\dot{x}$, $\dot{y}$ und Addition ergibt das Jacobische Integral

$$(3)\quad \mathsf{H} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{y}}\dot{y} - \Lambda \equiv \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{3}{2}n'^2 x^2 - \mu\frac{1}{r} = C,\ C \text{ konst.},$$

mit dessen Hilfe Hill die reziproke Entfernung eliminiert, indem er bildet:

$$(4a)\qquad \begin{aligned} X_1 &\equiv \Lambda_1 x + \Lambda_2 y + \mathsf{H} - C, \\ X_2 &\equiv -\Lambda_1 y + \Lambda_2 x; \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$(4)\qquad \begin{aligned} X_1 &\equiv x\ddot{x} + y\ddot{y} - 2n'(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{9}{2}n'^2 x^2 - C = 0, \\ X_2 &\equiv x\ddot{y} - y\ddot{x} + 2n'(x\dot{x} + y\dot{y}) \qquad\qquad + 3n'^2 xy \quad = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bilden auch für die hier in Anwendung kommende Methode den Ausgangspunkt.

Es ist leicht zu sehen, daß die Gleichungen (4) ebenfalls das Jacobische Integral (3) besitzen; aber es ist wohl zu beachten, daß dann μ die Integrationskonstante ist, die also einen vorgegebenen Wert besitzen muß. Da wir später explizit eine Zwischenformel auf dem Wege von (4) zu (3) brauchen, muß dieser hier kurz angegeben werden. Wir setzen noch $\Lambda = \Lambda^* + \frac{\mu}{r}$; zur Lagrangeschen Funktion Λ^* gehören Λ_1^*, Λ_2^* und H^*. (4a) gilt auch mit diesen Größen statt Λ_1, Λ_2 und H. Aus (4a) folgt dann

$$(5)\qquad \begin{aligned} X_1\frac{x}{r} - X_2\frac{y}{r} &\equiv \Lambda_1^* r + (\mathsf{H}^* - C)\frac{x}{r}, \\ X_1\frac{y}{r} + X_2\frac{x}{r} &\equiv \Lambda_2^* r + (\mathsf{H}^* - C)\frac{y}{r} \end{aligned}$$

und daraus durch Multiplikation mit $\dot{x}$, $\dot{y}$ und Addition

$$(6)\quad X_1\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} + X_2\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r} \equiv \dot{\mathsf{H}}^* r + (\mathsf{H}^* - C)\dot{r} \equiv \frac{d}{dt}[(\mathsf{H}^* - C)r].$$

Also für jede geschlossene periodisch durchlaufene Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(x(0) = x(\mathsf{T}),\ y(0) = y(\mathsf{T});\ \dot{x}(0) = \dot{x}(\mathsf{T}),\ \dot{y}(0) = \dot{y}(\mathsf{T}))$ ist

$$(7)\qquad \int\left[X_1\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} + X_2\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r}\right]dt = 0,$$

das Integral erstreckt über eine Periode von der Länge T.

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{8}$$

gesetzt, können wir dafür auch schreiben:

$$\int [X_1\, dr + X_2\, r\, d\varphi] = 0, \tag{9}$$

das Integral erstreckt über die geschlossene periodisch durchlaufene Kurve.

IV 2. Die Jacobischen Gleichungen.

Für $n' = 0$ werden unsere Gleichungen (2) gewiß erfüllt durch

$$x_* = a_* \cos nt, \qquad y_* = a_* \sin nt, \tag{10}$$

wobei die Konstanten a_* und n in der Beziehung $a_*^3 n^2 = \mu$ stehen; der Punkt $M_*(x_* y_*)$ führt also eine Kreisbewegung nach dem dritten Keplerschen Gesetz aus.

Wir betrachten nun daneben bei gegebenem, dem Betrage nach genügend kleinen n' die Kreisbewegung des Punktes $M_0(x_0 y_0)$:

$$x_0 = a_0 \cos\tau, \; y_0 = a_0 \sin\tau; \quad \tau = \nu t, \quad \nu = n - n'; \quad a_0 = a_*(1+\alpha), \tag{11}$$

wo α ein kleiner konstanter Parameter ist; n bzw. ν ist als gegeben zu betrachten.

Auf diese „ungestörte" Bewegung beziehen wir die gesuchte Mondbahn; genauer, wir nehmen als neue Koordinaten ξ, η des Mondes M die Komponenten des Vektors $\frac{1}{a_0}\overrightarrow{M_0(t)\,M(t)}$ in dem System $(\bar{x}\,\bar{y})$, dessen Ursprung der alte ist und dessen $\bar{x}$-Achse ständig durch $(x_0 y_0)$ hindurchgeht, das sich also um den Ursprung mit der Winkelgeschwindigkeit ν gegen das System $(x\,y)$ dreht. Es ist

$$\begin{aligned} x &= a_0(\cos\tau + \xi\cos\tau - \eta\sin\tau), \\ y &= a_0(\sin\tau + \xi\sin\tau + \eta\cos\tau) \end{aligned} \tag{12}$$

oder

$$\begin{aligned} a_0(1+\xi) &= \;\; x\cos\tau + y\sin\tau = r\cos v = \bar{x}, \\ a_0\cdot\eta &= -x\sin\tau + y\cos\tau = r\sin v = \bar{y}, \end{aligned} \qquad v = \varphi - \tau. \tag{13}$$

Unter Berücksichtigung des Additionstheorems der Geschwindigkeiten, wonach (vektoriell) die (Absolut-)Geschwindigkeit bezüglich des Systems $(x\,y)$, d. h. relativ zur Sonne, gleich ist der Relativgeschwindigkeit bezüglich des Systems $(\bar{x}\,\bar{y})$ plus der Mitführungsgeschwindigkeit des Systems $(\bar{x}\,\bar{y})$ gegen das System $(x\,y)$, findet man

$$a_0^{-2}(x^2 + y^2) = a_0^{-2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = 1 + 2\xi + \xi^2 + \eta^2, \tag{14}$$

$$a_0^{-2}(x\dot{x} + y\dot{y}) = \dot{\xi} + \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta}, \tag{15}$$

$$(16)\quad a_0^{-2}(x\ddot{x}+y\ddot{y}+\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\ddot{\xi}+\xi\ddot{\xi}+\eta\ddot{\eta}+\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2;$$
$$x\dot{y}-y\dot{x}=a_0(\bar{x}\dot{\eta}-\bar{y}\dot{\xi})+\nu(\bar{x}^2+\bar{y}^2),$$

$$(17)\quad a_0^{-2}(x\dot{y}-y\dot{x})=\nu+\dot{\eta}+2\nu\xi+\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}+\nu(\xi^2+\eta^2),$$

$$(18)\quad a_0^{-2}(x\ddot{y}-y\ddot{x})=\ddot{\eta}+2\nu\dot{\xi}+\xi\ddot{\eta}-\eta\ddot{\xi}+2\nu(\xi\dot{\xi}+\eta\dot{\eta});$$
$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=a_0^2(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)+2\nu a_0(\bar{x}\dot{\eta}-\bar{y}\dot{\xi})+\nu^2(\bar{x}^2+\bar{y}^2),$$

$$(19)\quad a_0^{-2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\nu^2+2\nu\dot{\eta}+2\nu^2\xi$$
$$+\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+2\nu(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})+\nu^2(\xi^2+\eta^2).$$

Endlich ist

$$a_0^{-2}x^2=\frac{1}{2}(1+\cos 2\tau)+\xi(1+\cos 2\tau)-\eta\sin 2\tau$$
$$+\frac{1}{2}\xi^2(1+\cos 2\tau)-\xi\eta\sin 2\tau+\frac{1}{2}\eta^2(1-\cos 2\tau),$$

$$(20)\quad a_0^{-2}xy=\frac{1}{2}\sin 2\tau+\xi\sin 2\tau+\eta\cos 2\tau$$
$$+\frac{1}{2}\xi^2\sin 2\tau+\xi\eta\cos 2\tau-\frac{1}{2}\eta^2\sin 2\tau.$$

Wenn wir nun noch die Gleichungen (4) mit $a_0^2\nu^2$ durchdividieren,

$$\frac{n'}{n-n'}=\frac{n'}{\nu}=m$$

setzen und $\frac{d}{\nu\,dt}=\frac{d}{d\tau}$ mit einem Strich bezeichnen, bekommen wir die fundamentalen Differentialgleichungen unseres Problems:

$$\xi''-\xi-\eta'=\frac{1}{2}+\frac{C}{a_0^3\nu^2}+2m+\frac{9}{4}m^2(1+\cos 2\tau)+2m\eta'+4m\xi$$
$$-(\xi\xi''+\eta\eta'')-\frac{1}{2}(\xi'^2+\eta'^2)+(\xi\eta'-\eta\xi')+\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$$
$$+2m(\xi\eta'-\eta\xi')+2m(\xi^2+\eta^2)+\frac{9}{2}m^2(\xi(1+\cos 2\tau)-\eta\sin 2\tau)$$
$$(21)\quad +\frac{9}{4}m^2(\xi^2(1+\cos 2\tau)-2\xi\eta\sin 2\tau+\eta^2(1-\cos 2\tau)),$$

$$2\xi'+\eta''=-\frac{3}{2}m^2\sin 2\tau-2m\xi'-(\xi\eta''-\eta\xi'')-2(\xi\xi'+\eta\eta')$$
$$-2m(\xi\xi'+\eta\eta')-3m^2(\xi\sin 2\tau+\eta\cos 2\tau)$$
$$-\frac{3}{2}m^2(\xi^2\sin 2\tau+2\xi\eta\cos 2\tau-\eta^2\sin 2\tau).$$

Das allgemeinste Problem wäre im Rahmen dieser Untersuchungen, für hinreichend kleine Werte von $|m|$ und von $\left|\frac{1}{2}+\frac{C}{a_0^3\nu^2}\right|$ periodische Lösungen $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ mit der Periode 2π von diesem Differentialgleichungs-

system zu ermitteln. Dabei kann man sich aber zu Nutzen machen, daß über den Parameter a_0 noch frei verfügt werden darf[47a]).

Entsprechend den Eigenschaften der Variationskurve, symmetrisch zu den Koordinatenachsen zu sein, suchen wir zunächst speziell solche periodische Lösungen $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ des (nichtlinearen) Differentialgleichungssystems (21), die in τ bereits die Periode π besitzen; d. h. wir führen statt τ als unabhängige Variable $\sigma = 2\tau$ ein, auf die sich nunmehr der Differentiationsstrich beziehen soll, und fragen nach periodischen Lösungen $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$ mit der Periode 2π in σ von folgendem System [wir setzen in (21)

$$\frac{1}{2} + \frac{C}{a_0^3 \nu^2} + 2m + \frac{9}{4} m^2 = 0, \tag{22}$$

was eine bestimmte Verfügung über a_0 bedeutet, außerdem dividieren wir die beiden Gleichungen des Systems je durch 4]:

$$\begin{aligned}
\xi'' - \tfrac{1}{4}\xi - \tfrac{1}{2}\eta' &= \tfrac{9}{16} m^2 \cos\sigma + m\eta' + m\xi \\
&\quad - (\xi\xi'' + \eta\eta'') - \tfrac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2) + \tfrac{1}{2}(\xi\eta' - \eta\xi') + \tfrac{1}{8}(\xi^2 + \eta^2) \\
&\quad + m(\xi\eta' - \eta\xi') + \tfrac{1}{2} m(\xi^2 + \eta^2) + \tfrac{9}{8} m^2 (\xi(1 + \cos\sigma) - \eta \sin\sigma) \\
&\quad + \tfrac{9}{16} m^2 (\xi^2 (1 + \cos\sigma) - 2\xi\eta \sin\sigma + \eta^2 (1 - \cos\sigma)),
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\xi' + \eta'' &= -\tfrac{3}{8} m^2 \sin\sigma - m\xi' - (\xi\eta'' - \eta\xi'') - (\xi\xi' + \eta\eta') \\
&\quad - m(\xi\xi' + \eta\eta') - \tfrac{3}{4} m^2 (\xi \sin\sigma + \eta\cos\sigma) \\
&\quad - \tfrac{3}{8} m^2 (\xi^2 \sin\sigma + 2\xi\eta\cos\sigma - \eta^2 \sin\sigma).
\end{aligned}$$

Zur Abkürzung schreiben wir auch $\xi, \eta = \xi_1, \xi_2 = \xi_\alpha$ und für das System (23)

$$Y_\alpha \equiv L_\alpha - F_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2); \tag{24}$$

dabei ist

$$(L_\alpha) = (L_{\alpha\beta})(\xi_\alpha), \qquad (L_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} D^2 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} D \\ D & D^2 \end{pmatrix}. \tag{24a}$$

Die Multiplikation mit D ist wieder symbolisch gemeint, bedeutet aber diesmal die Differentiation nach σ.

$$F_\alpha = F_\alpha(m, \sigma, \xi_\gamma) \tag{24b}$$

[47a]) Die Jacobische Konstante C hängt allein von n' und $\mathsf{T} \frac{2\pi}{n - n'}$ ab, also allein von n' und n. Vgl. G. Herglotz, Bemerkung zum dritten Keplerschen Gesetz, Festschrift für H. v. Seeliger, Berlin 1924, S. 197–199.

sind die rechten Seiten in (23), sie sind Funktionen von σ, dem Parameter m und den gesuchten Funktionen ξ, η und ihren 1. und 2. Ableitungen nach σ.

IV 3. Heranziehung des adjungierten Systems.

Allgemein hat man einem Differentialsystem

$$(25)\quad (L_{\alpha\beta}) = (p^{(0)}_{\alpha\beta} D^2 + p^{(1)}_{\alpha\beta} D + p^{(2)}_{\alpha\beta}), \quad p^{(s)}_{\alpha\beta} = p^{(s)}_{\alpha\beta}(\tau) \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, N)$$

folgendes adjungierte Differentialsystem an die Seite zu stellen[48]):

$$(26)\quad (M_{\beta\alpha}) = (q^{(0)}_{\alpha\beta} D^2 + q^{(1)}_{\alpha\beta} D + q^{(2)}_{\alpha\beta}),$$

$$(27)\quad q^{(0)}_{\alpha\beta} = p^{(0)}_{\beta\alpha}, \quad q^{(1)}_{\alpha\beta} = -p^{(1)}_{\beta\alpha} + 2D\, p^{(0)}_{\beta\alpha}, \quad q^{(2)}_{\alpha\beta} = p^{(2)}_{\beta\alpha} - (D\, p^{(1)}_{\beta\alpha} - D^2 p^{(0)}_{\beta\alpha}).$$

Wir setzen, unter u, v zwei 2-mal stetig differenzierbare Funktionen verstanden,

$$(28)\quad (L_\alpha(u)) = (L_{\alpha\beta})(u_\alpha), \quad (v_\beta)(M_{\alpha\beta}) = (M_\beta(v)),$$

wo also in dem zweiten Matrizenprodukt die in $M_{\alpha\beta}$ angedeuteten Differentiationen auf die links davor stehenden Funktionen v_β auszuüben sind. Es ist auch $(M_\alpha(v)) = (M_{\beta\alpha})(v_\alpha)$.

Dann gilt die Greensche Formel

$$(29)\quad \int_0^{2\pi} \sum_\alpha [v_\alpha L_\alpha(u) - u_\alpha M_\alpha(v)]\, d\tau = \sum_{\alpha\beta} [p^{(0)}_{\alpha\beta}(v_\alpha \dot{u}_\beta - u_\beta \dot{v}_\alpha) + (p^{(1)}_{\alpha\beta} - \dot{p}^{(0)}_{\alpha\beta}) v_\alpha u_\beta]_0^{2\pi}.$$

Die der Randbedingung der Periodizität genügenden Nullösungen von L_α bzw. M_β bezeichnen wir mit $u^{(\sigma)}_\alpha$ bzw. $v^{(\varrho)}_\beta$:

$$(30)\quad L_\alpha(u^{(\sigma)}) = 0, \quad M_\beta(v^{(\varrho)}) = 0.$$

Die beiden adjungierten Systeme besitzen gleich viele linear unabhängige periodische Nullösungen. Wir nehmen an, es sei

$$(31)\quad \int \sum_\gamma v^{(\varrho)}_\gamma u^{(\sigma)}_\gamma\, d\tau = \delta^{\varrho\sigma} \quad \text{(Biorthogonalität)}[49].$$

In unserem Fall konstanter Koeffizienten $p^{(s)}_{\alpha\beta}$ entsteht die adjungierte Matrix einfach durch Verwandlung von D in $-D$, also

$$(32)\quad (M_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} D^2 - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} D \\ -D & D^2 \end{pmatrix}.$$

[48]) Es ist ein für allemal α (auch i, ϱ) Zeilenindex, β (auch j, σ) Spaltenindex. In diesen allgemeinen Betrachtungen ist die unabhängige Variable mit τ, die Differentiation nach ihr mit einem Punkt bezeichnet.

[49]) Dies ist eine besondere Voraussetzung.

Die Determinante ist

$$\Delta^0 = \det(L_{\alpha\beta}) = \det(M_{\alpha\beta}) = D^2(D^2 + \tfrac{1}{4}). \tag{33}$$

Die periodischen Lösungen der zugehörigen homogenen Systeme

$$L_\gamma(u) = 0 \quad \text{und} \quad M_\gamma(v) = 0 \qquad (\gamma = 1, 2) \tag{34}$$

genügen den Systemen

$$\Delta^0 u_\gamma = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta^0 v_\gamma = 0 \qquad (\gamma = 1, 2). \tag{35}$$

Es ist mithin z. B. $D^2 u_\gamma$ eine periodische Lösung der Differentialgleichung $(D^2 + \frac{1}{4}) u_\gamma = 0$, also $D^2 u_\gamma = 0$, d. h. $u_\gamma = c_\gamma$ (c_γ konstant); man sieht dann sofort, daß $u_1 = 0$ sein muß. Dasselbe gilt bei den v. Wir haben also die normierte Nullösung

$$\begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (v_1^{(0)}\ v_2^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Die periodischen Nullösungen der beiden adjungierten Systeme sind daher in unserem Falle identisch, insbesondere (nach Normieren) biorthogonal.

* * *

Wir brauchen jetzt den zum Differentialsystem $L_\alpha(\xi)$ $(\alpha = 1, \ldots, N-2)$ gehörigen Greenschen Tensor (im erweiterten Sinne). Das ist eine $N \cdot N$-Matrix von Funktionen

$$G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}(\tau, \underline{\tau}), \tag{37}$$

die von zwei Argumenten $\tau, \underline{\tau}$ abhängen und folgende Eigenschaften haben: Die $G_{\alpha\beta}(\tau, \underline{\tau})$ sind im Rechteck $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$, $0 \leqq \underline{\tau} \leqq 2\pi$ stetig, erleiden aber für $\tau = \underline{\tau}$ den Knick

$$\sum_\gamma p_{\alpha\gamma}^{(0)} [D G_{\gamma\beta}]_{\underline{\tau} = \tau - 0}^{\underline{\tau} = \tau - 0} = -\delta_{\alpha\beta}, \qquad \sum_\gamma [\underline{D} G_{\alpha\gamma}]_{\tau = \underline{\tau} + 0}^{\tau = \underline{\tau} - 0} p_{\gamma\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}. \tag{38}$$

Für $\tau \neq \underline{\tau}$ gelten die Differentialgleichungssysteme

$$L_\alpha(G_{1\beta}, \ldots, G_{N\beta}) = \sum^{\varrho} u_\alpha^{(\varrho)} \underline{v}_\beta^{(\varrho)}, \qquad \underline{M}_\beta(G_{\alpha 1}, \ldots, G_{\alpha N}) = \sum^{\varrho} u_\alpha^{(\varrho)} \underline{v}_\beta^{(\varrho)}, \tag{39}$$

wobei der Strich unter M andeuten soll, daß diesmal nach τ differenziert wird. Dazu kommt die Randbedingung der Periodizität

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(0, \underline{\tau}) &= G_{\alpha\beta}(2\pi, \underline{\tau}), & G_{\alpha\beta}(\tau, 0) &= G_{\alpha\beta}(\tau, 2\pi), \\ D G_{\alpha\beta}(0, \underline{\tau}) &= D G_{\alpha\beta}(2\pi, \tau), & \underline{D} G_{\alpha\beta}(\tau, 0) &= \underline{D} G_{\alpha\beta}(\tau, 2\pi). \end{aligned} \tag{40}$$

Außerdem genügt $G_{\alpha\beta}$ den Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_0^{2\pi} d\tau \sum_\gamma v_\gamma^{(\varrho)} G_{\gamma\beta} = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sum_\gamma G_{\alpha\gamma} \underline{u}_\gamma^{(\sigma)}\, d\underline{\tau} = 0. \tag{41}$$

Sei nun ξ_α eine der Randbedingung der Periodizität genügende Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$L_\alpha(\xi) = F_\alpha \tag{24}$$

mit rechten Seiten F_α, die stetige Funktionen von τ sind. Dann folgt in bekannter Weise aus der Greenschen Formel (29)

$$\int \sum_\gamma [\underline{v}_\gamma \underline{L}_\gamma(\underline{u}) - \underline{u}_\gamma \underline{M}_\gamma(\underline{v})]\, d\tau$$
$$= \sum_{\gamma\beta} [\underline{p}^{(0)}_{\gamma\beta}(\underline{v}_\gamma \dot{\underline{u}}_\beta - \underline{u}_\beta \dot{\underline{v}}_\gamma) + (\underline{p}^{(1)}_{\gamma\beta} - \dot{\underline{p}}^{(0)}_{\gamma\beta}) \underline{v}_\gamma \underline{u}_\beta]_0^{2\pi} \tag{29}$$

mit $\underline{u}_\gamma = \underline{\xi}_\gamma$, $\underline{v}_\gamma = G_{\alpha\gamma}(\tau, \underline{\tau})$, τ Parameter, die Auflösungsformel

$$\int \sum_\gamma G_{\alpha\gamma} \underline{F}_\gamma\, d\underline{\tau} - \sum^{\varrho} \int \sum_\gamma \underline{\xi}_\gamma \underline{v}_\gamma^{(\varrho)}\, d\tau \cdot u_\alpha^{(\varrho)} = - \sum_{\beta\gamma} \underline{p}^{(0)}_{\gamma\beta} [\underline{D} G_{\alpha\gamma}]^{\tau=\tau-0}_{\underline{\tau}=\tau+0} \cdot \xi_\beta,$$

d. h.

$$\xi_\alpha = \sum^{\varrho} r^{(\varrho)} u_\alpha^{(\varrho)} - \int \sum_\gamma G_{\alpha\gamma} F_\gamma\, d\underline{\tau}, \tag{42}$$

wo

$$r^{(\varrho)} = \int \sum_\gamma v_\gamma^{(\varrho)} \xi_\gamma\, d\tau. \tag{43}$$

Umgekehrt, ist die vorletzte Gleichung erfüllt mit irgendwelchen $r^{(\varrho)}$, so genügt ξ_α der Randbedingung der Periodizität, und es gilt

$$\int \sum_\alpha \xi_\alpha v_\alpha^{(\sigma)}\, d\tau = \sum^{\varrho} r^{(\varrho)} \int \sum_\alpha u_\alpha^{(\varrho)} v_\alpha^{(\sigma)}\, d\tau = r^{(\sigma)} \tag{44}$$

wegen der vorausgesetzten Biorthogonalität der $v^{(\sigma)}$ und der $u^{(\varrho)}$ und wegen der Orthogonalität der $v^{(\sigma)}$ zu $G_{\cdot\beta}$. Bei Anwendung des Differentialausdruckes L_α gibt die Nullösung im Ausdruck für ξ keinen Beitrag. Der zweite Term in (42) kann einmal unter dem Integralzeichen differenziert werden. Den bei der zweiten Differentiation entstehenden Ausdruck $-\sum_\delta p^{(0)}_{\alpha\delta} \frac{d}{d\tau} \int_0^{2\pi} \sum_\gamma D G_{\delta\gamma} \underline{F}_\gamma\, d\tau$ müssen wir aber zerlegen in $\frac{d}{d\tau}\left[\int_0^{\tau-0} + \int_{\tau+0}^{2\pi}\right]$; das gibt von der Differentiation nach den Grenzen herrührend

$$-\sum_{\gamma\delta} p^{(0)}_{\alpha\delta} [D G_{\delta\gamma}]^{\tau=\tau-0}_{\underline{\tau}=\tau+0} F_\gamma = \sum_\gamma \delta_{\alpha\gamma} F_\gamma = F_\alpha, \tag{45}$$

und alles in allem

$$L_\alpha(\xi) = F_\alpha - \sum^{\varrho} F^{(\varrho)} u_\alpha^{(\varrho)}, \quad \text{d. h.} \quad Y_\alpha = - \sum^{\varrho} F^{(\varrho)} u_\alpha^{(\varrho)}, \tag{46}$$

wo

$$F^{(\varrho)} = \int \sum_\gamma v_\gamma^{(\varrho)} F_\gamma\, d\tau. \tag{47}$$

IV 4. Existenz der Variationsbahn.

Im Falle unseres Systems (24a), wo $u^{(0)}$ mit $v^{(0)}$ zusammenfällt, ist das System der Integrodifferentialgleichungen (42) einfach

$$\xi_\alpha = r^{(0)} u_\alpha^{(0)} - \int_0^{2\pi} \sum_\gamma G_{\alpha\gamma} F_\gamma \, d\sigma, \tag{48}$$

wo [vgl. (43)]

$$r^{(0)} = \int_0^{2\pi} \sum_\gamma v_\gamma^{(0)} \xi_\gamma \, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \eta \, d\sigma. \tag{49}$$

Wieder wird dieses System mit hinreichend kleinem m und beliebig angenommenem, nur hinreichend kleinem Parameterwert $r^{(0)}$ (am einfachsten mit $r^{(0)} = 0$) durch sukzessive Approximationen aufgelöst[50]). Damit die erhaltene Lösung $\xi_\alpha = \xi_\alpha(\sigma, m, r^{(0)})$, die sich in eine Potenzreihe nach m und $r^{(0)}$ entwickeln läßt, auch den Differentialgleichungen (24) genügt, ist notwendig und hinreichend das Erfülltsein der Verzweigungsgleichung

$$F^{(0)} \equiv \int_0^{2\pi} \sum_\gamma v_\gamma^{(0)} F_\gamma \, d\sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} F_2 \, d\sigma = 0. \tag{50}$$

Diese Gleichung zwischen $m, r^{(0)}$ ist aber identisch erfüllt[51]); (46) besagt nämlich in unserem Fall

$$Y_\alpha = - F^{(0)} u_\alpha^{(0)}, \tag{51}$$

somit gibt die Integralformel (9) wegen $Y_\alpha = \frac{1}{4 a_0^2 \nu^2} X_\alpha$

$$0 = \int Y_1 \frac{1}{a_0} dr + Y_2 \frac{r}{a_0} d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \left[Y_1 \frac{1}{a_0} \frac{dr}{d\sigma} + Y_2 \frac{r}{a_0} \frac{d\varphi}{d\sigma} \right] d\sigma, \tag{52}$$

also

$$0 = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \frac{r}{a_0} d\varphi \cdot F^{(0)}. \tag{53}$$

Der Faktor von $F^{(0)}$ ist gleich $- \sqrt{\frac{\pi}{2}} + (m, r^{(0)})_1$, also sicher $\neq 0$ für genügend kleine Beträge von $m, r^{(0)}$. Somit folgt für beliebige, nur hinreichend kleine Beträge von $m, r^{(0)}$:

$$F^{(0)} = 0.$$

Insbesondere können wir $r^{(0)} = 0$ nehmen. Unter dieser von jetzt an geltenden Annahme hängen unsere Entwicklungen nur noch von dem einen Parameter m ab.

---

[50]) Vgl. Anmerkung [42]).

[51]) Vgl. die analogen Betrachtungen bei den trivialen Verzweigungsgleichungen der Gleichgewichtsfiguren im regulären Fall, oben S. 209.

Später (S. 256) berechnen wir explizit $(G_{\alpha\beta}) =$

$$\begin{pmatrix} \pm \sin\frac{\sigma-\underline{\sigma}}{2} + \frac{4}{\pi} & \mp \cos\frac{\sigma-\underline{\sigma}}{2} + \frac{1}{\pi}(\sigma-\underline{\sigma}\pm\pi) \\ \pm 2\cos\frac{\sigma-\underline{\sigma}}{2} - \frac{2}{\pi}(\sigma-\underline{\sigma}\pm\pi) & \pm 2\sin\frac{\sigma-\underline{\sigma}}{2} - \frac{1}{4\pi}(\sigma-\underline{\sigma})(\sigma-\underline{\sigma}\pm 2\pi) - \frac{\pi}{6} + \end{pmatrix}$$

Wenn wir wieder zur ursprünglichen Variablen τ übergehen, berechnet sich also die Variationsbahn des Mondes durch sukzessive Quadraturen aus folgendem System:

$$\xi_\alpha = -\int_0^\pi \sum_\gamma G_{\alpha\gamma}\,\underline{\Phi}_\gamma\, d\underline{\tau}, \tag{48'}$$

$$(G_{\alpha\beta}) =$$

$$\begin{pmatrix} \pm \sin(\tau-\underline{\tau}) + \frac{4}{\pi} & \mp \cos(\tau-\underline{\tau}) + \frac{2}{\pi}\left(\tau-\underline{\tau}\pm\frac{\pi}{2}\right) \\ \pm 2\cos(\tau-\tau) - \frac{4}{\pi}\left(\tau-\underline{\tau}\pm\frac{\pi}{2}\right) & \pm 2\sin(\tau-\tau) - \frac{1}{\pi}(\tau-\underline{\tau})(\tau-\underline{\tau}\pm\pi) - \frac{\pi}{6} + \end{pmatrix}$$

$$\pm 1 = \frac{\underline{\tau}-\tau}{|\underline{\tau}-\tau|}, \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 = {} & \frac{9}{8}m^2\cos 2\tau + m\eta' + 2m\xi \\ & - \frac{1}{2}(\xi\xi'' + \eta\eta'') - \frac{1}{4}(\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{1}{2}(\xi\eta' - \eta\xi') + \frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2) \\ & + m(\xi\eta' - \eta\xi') + m(\xi^2+\eta^2) + \frac{9}{4}m^2(\xi(1+\cos 2\tau) - \eta\sin 2\tau) \\ & + \frac{9}{8}m^2(\xi^2(1+\cos 2\tau) - 2\xi\eta\sin 2\tau + \eta^2(1-\cos 2\tau)), \\ \Phi_2 = {} & -\frac{3}{4}m^2\sin 2\tau - m\xi' - \frac{1}{2}(\xi\eta'' - \eta\xi'') - (\xi\xi' + \eta\eta') \\ & - m(\xi\xi' + \eta\eta') - \frac{3}{2}m^2(\xi\sin 2\tau + \eta\cos 2\tau) \\ & - \frac{3}{4}m^2(\xi^2\sin 2\tau + 2\xi\eta\cos 2\tau - \eta^2\sin 2\tau). \end{aligned} \tag{21'}$$

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß durch geeignete Wahl von a_0 auch die Ausgangsgleichungen (2) befriedigt werden können. Die Gleichungen (5) und (6) zeigen, es ist a_0 so zu bestimmen, daß

$$\mathsf{H}^* - C = \frac{\mu}{r} \tag{3}$$

ausfällt, d. h. wegen (22), (11)

$$\frac{\mathsf{H}^*}{a_0^2\nu^2} + \frac{1}{2} + 2m + \frac{9}{4}m^2 = \frac{\mu}{\nu^2}\frac{1}{a_*^3(1+\alpha)^3}\frac{a_0}{r}. \tag{55}$$

Diese Gleichung für α (bei einem festen Wert von σ bzw. τ) besitzt immer eine wohlbestimmte Lösung; die von α und m unabhängigen Glieder heben sich natürlich weg.

Im einzelnen ergibt sich für die Anfangsglieder der Entwicklungen folgendes: Die erste Approximation der als vorhanden nachgewiesenen Lösung bestimmt sich aus

$$\begin{aligned} \xi_1'' - \tfrac{1}{4}\xi_1 - \tfrac{1}{2}\eta_1' &= \tfrac{9}{16} m^2 \cos\sigma, \\ \xi_1' + \eta_1'' &= -\tfrac{3}{8} m^2 \sin\sigma \end{aligned} \tag{56}$$

zu

$$\xi_1 = -m^2\cos\sigma = -m^2\cos 2\tau \qquad r\cos v = a_0\{1+[-m^2+\ldots]\cos 2\tau+\ldots\}$$
$$\eta_1 = \tfrac{11}{8}m^2\sin\sigma = \tfrac{11}{8}m^2\sin 2\tau, \quad \text{d. h.} \quad r\sin v = a_0\left\{\left[\tfrac{11}{8}m^2+\ldots\right]\sin 2\tau+\ldots\right\},$$

der Anfang der von Hill[52]) berechneten Entwicklung.

Zur Bestimmung von a_0 haben wir (3), (19), (20), (14) zufolge

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} + \frac{d\eta}{d\tau} + \xi + \ldots - \tfrac{3}{2}m^2\cos^2\tau + \ldots + \tfrac{1}{2} + 2m + \tfrac{9}{4}m^2 \\ &\quad = (1+2m+m^2)(1+\alpha)^{-3}(1+2\xi+\ldots)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

wegen $\nu = n - n' = \frac{n}{1+m}$, $\frac{\mu}{n^2}\frac{1}{a_*^3} = 1$. Also für $\tau = 0$

$$-3\alpha = 2\xi + \frac{d\eta}{d\tau} - \tfrac{3}{2}m^2 + \tfrac{9}{4}m^2 - m^2 + \ldots = \tfrac{1}{2}m^2 + \ldots,$$

$$\alpha = -\tfrac{1}{6}m^2 + \ldots, \qquad a_0 = \left(\frac{\mu}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \tfrac{1}{6}m^2 + \ldots\right). \tag{58}$$

Endlich berechnen wir noch aus (22) die zugehörige Jacobische Konstante

$$C = -\tfrac{1}{2}\nu^2 a_0^2\left(1 + 4m + \tfrac{9}{2}m^2\right). \tag{59}$$

Man bekommt

$$\begin{aligned} -C &= \frac{1}{2}\frac{n^2}{(1+m)^2}\left(\frac{\mu}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[1-\tfrac{1}{6}m^2+\ldots\right]^2\left(1+4m+\tfrac{9}{2}m^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mu n)^{\frac{2}{3}}(1-2m+3m^2+\ldots)\left[1-\tfrac{1}{3}m^2+\ldots\right]\left(1+4m+\tfrac{9}{2}m^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mu n)^{\frac{2}{3}}\left(1+2m-\tfrac{5}{6}m^2+\ldots\right), \end{aligned}$$

übereinstimmend mit dem Anfang der Hillschen Entwicklungen[53]). Da für

[52]) G. W. Hill, loc. cit. [13]), S. 317 f.
[53]) G. W. Hill, loc. cit. [13]), S. 319 f.

hinreichend kleine m die von Herrn Wintner[54]) sichergestellten Kurven der Hillschen Schar Bedingungen von der in Anm. [42]) angegebenen Form genügen, unter denen Unität besteht, so ist (für hinreichend kleine m) die Identität der erhaltenen Lösungen mit denen der Hillschen Schar ersichtlich.

Außer der durch (48′) gegebenen Lösung $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ besitzen die Jacobischen Gleichungen (21), wo nach (22) über a_0 verfügt ist, für genügend kleines m keine weiteren periodischen Lösungen von der Periode 2π, die mit ihren 1. und 2. Ableitungen absolut genügend klein sind. Es lauten nämlich bei Zugrundelegung des Intervalls $0 \leqq \tau \leqq 2\pi$ die beiden adjungierten Systeme

$$(L_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} D^2-1 & -D \\ 2D & D^2 \end{pmatrix}, \qquad (M_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} D^2-1 & D \\ 2D & D^2 \end{pmatrix}, \qquad D = \frac{d}{d\tau}.$$

Die periodischen Nullösungen sind

$$\begin{pmatrix} u_1^{(\sigma)} \\ u_2^{(\sigma)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos\tau}{\sqrt{3\pi}} & \frac{\sin\tau}{\sqrt{3\pi}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \frac{-2\sin\tau}{\sqrt{3\pi}} & \frac{2\cos\tau}{\sqrt{3\pi}} \end{pmatrix}, \qquad (v_1^{(\varrho)}\ v_2^{(\varrho)}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \frac{\cos\tau}{\sqrt{3\pi}} & \frac{-\sin\tau}{\sqrt{3\pi}} \\ \frac{\sin\tau}{\sqrt{3\pi}} & \frac{\cos\tau}{\sqrt{3\pi}} \end{pmatrix}$$

($\varrho, \sigma = 1, 2, 3$). Zu den Anfangsgliedern (57) treten jetzt noch $\sum^{\varrho} r^{(\varrho)} u_\alpha^{(\varrho)}$. Da wir für $m = 0$ in der Nachbarschaft des Kreises die 3-parametrige Schar der Keplerellipsen haben, müssen die Verzweigungsgleichungen für $m = 0$ identisch erfüllt sein[55]), also ihre linken Seiten m als Faktor enthalten. Es wird

$$\begin{aligned} F^{(1)} &\equiv m\left[\ \frac{2}{3} r^{(2)} + (m, r^{(\varrho)})_2\right] = 0, \\ F^{(2)} &\equiv m\left[-\frac{2}{3} r^{(1)} + (m, r^{(\varrho)})_2\right] = 0. \end{aligned} \tag{60}$$

Die hingeschriebenen Terme ergeben sich aus den Gliedern

$$2m\eta' + 4m\xi, \qquad -2m\xi$$

in den rechten Seiten F_1, F_2 von (21). Also haben die Verzweigungsgleichungen nur eine Lösung $r^{(1)}$, $r^{(2)}$ in Abhängigkeit von m (und $r^{(0)}$); diese muß $r^{(1)} \equiv 0$, $r^{(2)} \equiv 0$ sein, wozu (48′) gehört.

---

[54]) A. Wintner, loc. cit. [14]) III, S. 227.

[55]) Im Zweikörperproblem ($m = 0$) das identische Erfülltsein der Verzweigungsgleichungen independent einzusehen, setzt man am besten für die „gestörte" Bewegung $\tau - n(1+\beta)t$. Die Bahn ist gewiß symmetrisch, sagen wir zur x-Achse: $r^{(2)} = 0$; dann ist $F^{(2)} = 0$ identisch erfüllt. Aus $F^{(1)} = 0$ läßt sich β eindeutig als Funktion von $r^{(0)}$, $r^{(1)}$ berechnen. Zum Schluß kann man noch durch eine Ähnlichkeitstransformation vergrößern oder verkleinern, bis die mittlere Bewegung den vorgegebenen Wert n hat.

V. Bestimmung des Greenschen Tensors.

Die explizite Berechnung der Greenschen Tensoren im erweiterten Sinne für die im vorangehenden aufgetretenen Differentialgleichungssysteme[55a]) mit konstanten Koeffizienten geschieht am besten in der Weise, daß man zu einem durch einen Parameter λ erweiterten System übergeht und dessen Greenschen Tensor (im gewöhnlichen Sinne) als Funktion von λ ermittelt. Dann kann man aus der Entwicklung dieser Funktion in der Umgebung des speziellen λ-Wertes, der dem ursprünglichen System entspricht und sich als Eigenwert herausstellt, für dieses den Greenschen Tensor im erweiterten Sinne herstellen.

Handelt es sich um das System[56])

(47) III $$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} D^2 - 3q^2 & -2qD \\ 2qD & D^2 \end{pmatrix},$$

so bilden wir

(61) $$(\Lambda_{ij}) = (L_{ij} + \lambda \delta_{ij}).$$

Die Determinante ist, wenn, ohne eine Verwechslung mit den früher ebenso bezeichneten Größen zu fürchten,

$$\Lambda = (\Lambda_{ij}), \qquad L = (L_{ij})$$

usw. gesetzt wird,

(62) $$\Delta \equiv \det \Lambda = D^4 + (q^2 + 2\lambda) D^2 - \lambda (3q^2 - \lambda) = (D^2 + s_1)(D^2 + s_2),$$

(63) $$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = \frac{q^2 + 2\lambda}{2} \mp q \sqrt{\frac{q^2 + 16\lambda}{2}} = q^2 \left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{16}{q^2}\lambda}\right) + \lambda$$

$$= \begin{cases} -3\lambda \left(1 - \frac{16}{3q^2}\lambda + \ldots\right) \\ q^2 + 5\lambda + \ldots . \end{cases}$$

Bei der Variationskurve war

(24a), (32) IV $$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} D^2 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}D \\ D & D^2 \end{pmatrix}, \qquad (M_{ij}) = \begin{pmatrix} D^2 - \frac{1}{4} & \frac{1}{2}D \\ -D & D^2 \end{pmatrix}$$

und man bildet

(64) $$(\Lambda_{ij}) = (L_{ij} + \lambda \delta_{ij}), \qquad (\mathsf{M}_{ij}) = (M_{ij} + \lambda \delta_{ij}).$$

Dann wird die Determinante[56])

(65) $$\Delta = \det \Lambda = \det \mathsf{M} = D^4 + \left(\frac{1}{4} + 2\lambda\right) D^2 - \lambda \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)$$

$$= (D^2 + s_1)(D^2 + s_2),$$

[55a]) In diesen allgemeinen Betrachtungen bezeichnen wir durchgehends die unabhängige Variable mit τ, die Differentiation nach ihr mit einem Punkt.

[56]) Die römischen Ziffern weisen auf die Kapitel hin.

$$(66)\qquad \left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 2\lambda\right) \mp \frac{1}{8}\sqrt{1 + 32\lambda} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1 + 32\lambda}\right) + \lambda$$
$$= \begin{cases} -\lambda(1 - 16\lambda + \ldots) \\ \frac{1}{4} + 3\lambda + \ldots . \end{cases}$$

Wir ermitteln zunächst die Greensche Funktion $\Gamma = \Gamma(\tau, \underline{\tau}; \lambda)$ der Determinante Δ. Entsprechend der Zerlegung $\Delta = (D^2 + s_1)(D^2 + s_2)$ ergibt sich auch für Γ sofort ein Ausdruck als Faltung

$$(67)\qquad \Gamma(\tau, \tau) = -\int G_{s_2}(\tau, \tau_*)\, G_{s_1}(\tau_*, \underline{\tau})\, d\tau_*$$

aus den Greenschen Funktionen G_{s_1} von $D^2 + s_1$ und G_{s_2} von $D^2 + s_2$; es ist dabei angenommen, weder s_1 noch s_2 sei ein Eigenwert von $D^2 + s$. Für $G_{s_1}(\tau, \underline{\tau})$ und $G_{s_2}(\tau, \tau)$ gelten also die Eigenschaften der Greenschen Funktion: die Randbedingung $G_s(0, \tau) = G_s(2\pi, \tau)$, $DG_s(0, \tau) = DG_s(2\pi, \underline{\tau})$; für $\tau = \underline{\tau}$ ist G_s stetig, aber $DG_s(\underline{\tau} + 0, \underline{\tau}) - DG_s(\underline{\tau} - 0, \underline{\tau}) = -1$; es besteht die Differentialgleichung $(D^2 + s)G_s = 0$; $s = s_1, s_2$.

Zum Beweis der Formel (67) haben wir zu zeigen, 1. daß die Differentialgleichung $\Delta\Gamma = 0$ für $\tau \neq \underline{\tau}$ durch den unter (67) stehenden Integralausdruck erfüllt ist, was unmittelbar klar wird, wenn wir, wie schon die Schreibweise angibt, zuerst $D^2 + s_2$, dann $D^2 + s_1$ ausüben. Aus $D^2\Gamma = G_{s_1} - s_2\Gamma$ folgt weiter, 2. daß $D^3\Gamma$ für $\tau = \underline{\tau}$ den richtigen Sprung erfährt: $D^3\Gamma(\underline{\tau} + 0, \underline{\tau}) - D^3\Gamma(\underline{\tau} - 0, \underline{\tau}) = -1$, während Γ, $D\Gamma$, $D^2\Gamma$ stetig bleiben; 3. genügen Γ und seine Ableitungen der Randbedingung der Periodizität. Γ ist also wirklich die Greensche Funktion des Differentialausdrucks Δ und als solche, da Δ sich selbst adjungiert ist, symmetrisch: $\Gamma(\tau, \underline{\tau}) = \Gamma(\underline{\tau}, \tau)$, d. h. es gilt auch

$$(68)\qquad \Gamma(\tau, \underline{\tau}) = -\int G_{s_1}(\tau, \tau_*)\, G_{s_2}(\tau_*, \underline{\tau})\, d\tau_*,$$

da ja auch $G_s(\tau, \underline{\tau})$ symmetrisch ist.

Daraus folgt noch, daß sich Γ auch additiv aus G_{s_1} und G_{s_2} zusammensetzen läßt. Aus den Integralausdrücken (67) bzw. (68) für Γ folgt nämlich

$$D^2\Gamma + s_2\Gamma = G_{s_1}, \qquad D^2\Gamma + s_1\Gamma = G_{s_2},$$

also durch Subtraktion

$$(69)\qquad \Gamma = -\frac{G_{s_2} - G_{s_1}}{s_2 - s_1}.$$

Aus der Greenschen Funktion Γ der Determinante Δ folgt der Greensche Tensor $\Gamma_{\alpha\beta}$ des Systems $(\Lambda_{\alpha\beta})$ aber unmittelbar. Es sei $(\Lambda^{\alpha\beta})$ die zu $(\Lambda_{\alpha\beta})$ reziproke Differentiationsmatrix, d. h. $\Lambda^{\alpha\beta}$ sei das algebraische Komplement von $\Lambda_{\beta\alpha}$ (noch dividiert [vgl. 244] durch die Determinante $p^{(0)}$ der Matrix $(p^{(0)}_{\alpha\beta})$

der Koeffizienten von D^2 in $(L_{\alpha\beta})$, die in unserem Fall die Einheitsmatrix ist). Dann wird[57])

$$(70) \qquad \Gamma_{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha\beta}\Gamma.$$

In der Tat ist

$$(71) \qquad (\Lambda_{\alpha\beta})(\Gamma_{\alpha\beta}) = \left(\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{p^{(0)}}\Delta\Gamma\right) = (0),$$

d. h. gleich der Nullmatrix. Auch die Randbedingung der Periodizität $(40)_1$ sowie die Knickeigenschaft $(38)_1$ des Greenschen Tensors sind erfüllt; letzteres folgt aus

$$(72) \qquad \left([D\Gamma_{\alpha\beta}]_{\tau=\underline{\tau}-0}^{\tau=\underline{\tau}+0}\right) = \left(-\underline{p}_{(0)}^{\alpha\beta}\right),$$

wenn $(p_{(0)}^{\alpha\beta})$ die reziproke Matrix von $(p_{\alpha\beta}^{(0)})$ bedeutet; daher ist

$$(73) \qquad \left(\underline{p}_{\alpha\beta}^{(0)}\right)\left([D\Gamma_{\alpha\beta}]_{\tau=\underline{\tau}-0}^{\tau=\underline{\tau}+0}\right) = (-\delta_{\alpha\beta}).$$

Die dazu adjungierten Beziehungen (siehe $(40)_2$, $(38)_2$ und $(39)_2$, wo aber rechts 0 zu schreiben ist) sind dann von selbst erfüllt.

Es sei jetzt allgemein

$$(74) \qquad \Lambda_\alpha(u_\gamma) \equiv L_\alpha(u_\gamma) + \lambda u_\alpha \quad \text{bzw.} \quad \mathsf{M}_\beta(v_\gamma) \equiv M_\beta(v_\gamma) + \lambda v_\beta \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, N)$$

ein Differentialsystem und sein adjungiertes mit der Randbedingung der Periodizität. $\lambda = 0$ sei kein Eigenwert. Dann existiert sicher der zu $\lambda = 0$ gehörige Greensche Tensor (im gewöhnlichen Sinne) $G_{\alpha\beta}(\tau, \tau)$; er genügt den Gleichungen (38), (40) sowie statt (39)

$$(39_0) \qquad (L_{\alpha\beta})(G_{\alpha\beta}) = (0), \qquad (G_{\alpha\beta})(\underline{M}_{\tau\beta}) = (0).$$

Analog wie im selbstadjungierten Falle sieht man, die Eigenfunktionen von $\Lambda_\alpha(u) = 0$ bzw. $\mathsf{M}_\beta(v) = 0$ sind die rechtsseitigen bzw. linksseitigen Eigenfunktionen der (unsymmetrischen) Kernmatrix $G_{\alpha\beta}$; d h. es ergibt sich (aus der Greenschen Formel (29))

$$(75) \qquad u_\alpha = \lambda \int \sum_\gamma G_{\alpha\gamma}\underline{u}_\gamma\, d\underline{\tau} \quad \text{bzw.} \quad \lambda \int d\tau \sum_\gamma v_\gamma G_{\gamma\beta} = \underline{v}_\beta.$$

Diese beiden Systeme von Integralgleichungen lassen sich in zwei gewöhnliche Integralgleichungen umschreiben, wenn man als Grundintervall den N-mal durchlaufenen Einheitskreis $T = T_1 + \ldots + T_N$ $(0 \leqq \tau \leqq 2\pi N)$ nimmt und dann setzt

$$(76) \qquad \begin{aligned} u = u_\alpha, \quad v = v_\alpha, &\quad \text{falls } \tau \text{ in } T_\alpha \text{ liegt, und} \\ G = G_{\alpha\beta}, &\quad \text{falls } \tau \text{ in } T_\alpha,\ \underline{\tau} \text{ in } T_\beta \text{ liegt.} \end{aligned}$$

---

[57]) Vgl. analoge auf Weierstraß zurückgehende Bildungen bei G. Herglotz, Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. III. Berichte der Sächs. Akademie der Wissenschaften **80** (1928), S. 69—114, insbes. S. 105 f.

So wird

$$u = \lambda \int_T G\,\underline{u}\,d\underline{\tau}, \qquad \lambda \int_T d\tau\, v\, G = \underline{v}. \tag{77}$$

Sei $\Gamma = \Gamma(\tau\,\underline{\tau}, \lambda)$ die Resolvente[57a]) des Kernes G:

$$\Gamma = G + \lambda \int_T G(\tau\,\tau_*)\,\Gamma(\tau_*\,\underline{\tau})\,d\tau_*, \qquad \Gamma = G + \lambda \int_T \Gamma(\tau\,\tau_*)\,G(\tau_*\,\underline{\tau})\,d\tau_*. \tag{78}$$

Wenn wir dies als Matrizengleichungen für $G = (G_{\alpha\beta})$, $\Gamma = (\Gamma_{\alpha\beta})$ lesen, folgt

$$\Lambda\Gamma = L\Gamma + \lambda\Gamma = 0, \qquad \Gamma\underline{\mathsf{M}} = \Gamma\underline{M} + \lambda\Gamma = 0, \tag{79}$$

so daß wir in Γ den Greenschen Tensor von Λ haben, da Γ auch die richtigen Periodizitäts- und Knickeigenschaften besitzt.

Sei jetzt λ_0 ein einfacher Pol der Resolvente $\Gamma(\tau\,\underline{\tau}, \lambda)$, und $u_0^{(\sigma)}$ bzw. $\underline{v}_0^{(\varrho)}$ $(\varrho, \sigma = 1, \ldots, f)$ seien die zu $\lambda = \lambda_0$ gehörigen Nullösungen des Kernes G, die als biorthogonal angenommen werden können:

$$\int_T v_0^{(\varrho)}\, u_0^{(\sigma)}\, d\tau = \delta^{\varrho\,\sigma} \qquad (\varrho, \sigma = 1, \ldots, f). \tag{80}$$

Dann kann man die Schmidtsche Kernzerspaltung in der von Herrn Lichtenstein[58]) angegebenen Weise vornehmen:

$$G = g_0 + G_0, \qquad \lambda_0 g_0 = \sum^{\varrho} u_0^{(\varrho)}\, \underline{v}_0^{(\varrho)}; \tag{81}$$

es gilt

$$\int G_0\, \underline{u}_0^{(\sigma)}\, d\underline{\tau} = 0, \qquad \int d\tau\, v_0^{(\varrho)}\, G_0 = 0. \tag{82}$$

Es sei $\Gamma_0 = \Gamma_0(\tau\,\underline{\tau}, \lambda)$ der lösende Kern von G_0, d. h. es gelten die zu (78) analogen Gleichungen, wo alle Größen G, Γ den Index 0 tragen. Aus diesen Gleichungen (78_0) folgert man zunächst

$$\int \Gamma_0\, \underline{u}_0^{(\sigma)}\, d\underline{\tau} = 0, \qquad \int d\tau\, v_0^{(\varrho)}\, \Gamma_0 = 0, \tag{83}$$

d. h.

$$\int \Gamma_0(\tau\,\tau_*)\, g_0(\tau_*\,\underline{\tau})\, d\tau_* = 0, \qquad \int d\tau_*\, g_0(\tau\,\tau_*)\, \Gamma_0(\tau_*\,\underline{\tau}) = 0, \tag{84}$$

so daß wir (78_0) in die Form bringen können:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= -g_0 + G + \lambda \int G(\tau\,\tau_*)\,\Gamma_0(\tau_*\,\underline{\tau})\,d\tau_*, \\ \Gamma_0 &= -g_0 + G + \lambda \int \Gamma_0(\tau\,\tau_*)\,G(\tau_*\,\underline{\tau})\,d\tau_*. \end{aligned} \tag{85}$$

Jetzt sieht man, daß $\Gamma_0(\tau\,\tau, \lambda_0) = \Gamma_{00} = (\Gamma_{\alpha\beta}^{00})$, als Matrix aufgefaßt, den Greenschen Tensor (im erweiterten Sinne) für $\lambda = \lambda_0$ liefert. Es ist näm-

---

[57a]) Diese Bedeutung hat der schon benutzte Buchstabe Γ nur vorübergehend bis S. 255.

[58]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) I, S. 263.

lich für $\Gamma_0 = (\Gamma^0_{\alpha\beta})$

$$\begin{aligned} \Lambda\,\Gamma_0 &= L\,\Gamma_0 + \lambda\,\Gamma_0 = -\,L\,g_0 = \lambda_0\,g_0, \\ \Gamma_0\underline{\mathsf{M}} &= \Gamma_0\,\underline{M} + \lambda\,\Gamma_0 = -\,g_0\,\underline{M} = \lambda_0\,g_0, \end{aligned} \tag{86}$$

also

$$\Lambda\,\Gamma_0 = \sum^{\varrho} u_0^{(\varrho)} \times \underline{v}_0^{(\varrho)}, \qquad \Gamma_0\,\underline{\mathsf{M}} = \sum^{\varrho} u_0^{(\varrho)} \times \underline{v}_0^{(\varrho)}, \tag{87}$$

was nichts anderes bedeuten soll als[59])

$$(\Lambda_{\alpha\beta})(\Gamma^0_{\alpha\beta}) = \Big(\sum^{\varrho} u_{0\alpha}^{(\varrho)}\,\underline{v}_{0\beta}^{(\varrho)}\Big), \qquad (\Gamma^0_{\alpha\beta})(\underline{\mathsf{M}}_{\alpha\beta}) = \Big(\sum^{\varrho} u_{0\alpha}^{(\varrho)}\,v_{0\beta}^{(\varrho)}\Big). \tag{87a}$$

Γ_0 genügt im übrigen denselben Randbedingungen der Periodizität und denselben Knickbedingungen wie G.

Es gilt nun für die orthogonalen Kerne g_0 und G_0 der Satz[59a]): Die Resolvente $\Gamma_0(\tau\,\underline{\tau}, \lambda)$ des Kernes $G_0(\tau\,\tau)$ ist identisch mit dem regulären Teil in der Entwicklung der Resolvente $\Gamma(\tau\,\underline{\tau}, \lambda)$ nach Potenzen von $\lambda - \lambda_0$ in der Umgebung des Poles $\lambda = \lambda_0$. (Der Hauptteil der Entwicklung setzt bekanntlich die zu $\lambda = \lambda_0$ gehörigen Nullösungen in Evidenz.) Insbesondere ist also $\Gamma_{00} = \Gamma_0(\tau\,\underline{\tau}, \lambda_0)$ gleich dem Absolutglied in der genannten regulären Entwicklung.

Wir haben jetzt statt unserer Matrix $L = (L_{\alpha\beta})$ von S. 251 $(L - \lambda_0 E) + \lambda_0 E$, $E = (\delta_{\alpha\beta})$, zu schreiben, wo $-\lambda_0$ kein Eigenwert von $L + \lambda E$ ist. Dann können wir $(L - \lambda_0 E)$ mit der Matrix L in dem allgemeinen Satz von S. 253ff. identifizieren und bekommen tatsächlich den Greenschen Tensor (im erweiterten Sinne) von $L = (L - \lambda_0 E) + \lambda_0 E$, der wieder $G = (G_{\alpha\beta})$ heißen möge, als Absolutglied in der Entwicklung des Greenschen Tensors von $(L - \lambda_0 E) + \lambda E = L + (\lambda - \lambda_0) E$ nach Potenzen von $\lambda - \lambda_0$ in der Umgebung des Poles $\lambda = \lambda_0$ oder, was dasselbe ist, als Absolutglied in der Entwicklung des Greenschen Tensors von $L + \lambda E$ nach Potenzen von λ in der Umgebung des Poles $\lambda = 0$.

---

[59]) Greensche Tensoren (im erweiterten Sinne) im selbstadjungierten Fall bei H. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers, Palermo Rend. **31** (1915), S. 1–50, insbesondere S. 13. Erweiterte Greensche Funktionen nicht selbstadjungierter partieller elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung bei H. Geppert, Über die Eigenwertprobleme bei nichtselbstadjungierten elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Annalen **95** (1926), S. 519–543, Formel (15); die rechten Seiten dieser Formel müssen im Sinne unseres (87a) korrigiert werden, wie mir Herr Geppert freundlichst bestätigte. — Vgl. ferner J. Tamarkin, Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math. Zeitschr. **27** (1927), S. 1–54.

[59a]) Vgl. É. Goursat, Cours d'analyse mathématique III, 3ième éd., Paris 1923, No. 576.

Zusammengefaßt erfordert die Bildung des Greenschen Tensors folgende Schritte: Von $(L_{\alpha\beta})$ geht man zur Matrix $(\Lambda_{\alpha\beta}) = (L_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta})$ über und bestimmt zu ihrer Determinente $\Delta = (D^2 + s_1)(D^2 + s_2)$ die Greensche Funktion $\Gamma = -\frac{G_{s_2} - G_{s_1}}{s_2 - s_1}$. In der Entwicklung von $(\Lambda^{\alpha\beta}\Gamma) = (\Gamma_{\alpha\beta})$ nach Potenzen von λ an der Stelle $\lambda = 0$ nimmt man das Absolutglied $(G_{\alpha\beta})$, das ist der erweiterte Greensche Tensor von $(L_{\alpha\beta})$. Dabei ist[60]) die Greensche Funktion des Differentialausdrucks $D^2 + s$

$$(88) \qquad G_s = -\frac{\cos\sqrt{s}(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{2\sqrt{s}\sin\sqrt{s}\pi}, \qquad \pm 1 = \frac{\underline{\tau} - \tau}{|\underline{\tau} - \tau|}.$$

Dies gibt an der Stelle $s = 0$ entwickelt

$$(89) \quad G_s = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{s} + G^0 + (s)_1, \qquad G^0 = \frac{1}{4\pi}(\tau - \underline{\tau})(\tau - \underline{\tau} \pm 2\pi) + \frac{\pi}{6};$$

letzteres ist der bekannte Ausdruck[61]) für die zur Randbedingung der Periodizität gehörige erweitere Greensche Funktion des Differentialausdruckes D^2.

Bei dem zur Variationsbahn gehörigen System (24a) IV ist wegen (66)

$$(90) \qquad G_{s_1} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\lambda} + \frac{8}{\pi} + G^0 + (\lambda)_1, \qquad G_{s_2} = \pm\sin\frac{\tau - \underline{\tau}}{2} + (\lambda)_1.$$

Nach (69) folgt also die Entwicklung

$$(91) \qquad \Gamma = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\lambda} \mp 4\sin\frac{\tau - \underline{\tau}}{2} + \frac{1}{\pi}(\tau - \underline{\tau})(\tau - \underline{\tau} \pm 2\pi) + \frac{2\pi}{3} + (\lambda)_1.$$

Mittels der Matrix

$$(92) \qquad (\Lambda^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} D^2 + \lambda & \frac{1}{2}D \\ -D & D^2 - \frac{1}{4} + \lambda \end{pmatrix}$$

ergibt sich schließlich der Greensche Tensor für die Variationsbahn des Mondes:

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} \pm \sin\frac{\tau - \underline{\tau}}{2} & \mp\cos\frac{\tau - \underline{\tau}}{2} + \frac{1}{\pi}(\tau - \underline{\tau} \pm \pi) \\ \pm 2\cos\frac{\tau - \underline{\tau}}{2} - \frac{2}{\pi}(\tau - \underline{\tau} \pm \pi) & -\frac{\pi}{6} + \frac{4}{\pi} \pm 2\sin\frac{\tau - \underline{\tau}}{2} - \frac{1}{4\pi}(\tau - \tau)(\tau - \underline{\tau} \pm 2\pi) \end{pmatrix}.$$

Bei dem sich selbst adjungierten System (43) III des k-Planetenproblems ist bei nicht ganzzahligem q die zu (45) III gehörige Greensche Funktion

[60]) Vgl. G. Vivanti, Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari, Milano 1916, S. 307. Deutsche Übersetzung von F. Schwank, Hannover 1929, S. 215.

[61]) Vgl. D. Hilbert, loc. cit. [40]), S. 45.

durch (88) mit $s = q^2$ gegeben. Der Greensche Tensor des Systems (47) III bestimmt sich ebenso wie im Falle des Mondes: Aus (89) und (63) folgt

$$(93) \quad G_{s_1} = \frac{1}{6\pi}\frac{1}{\lambda} + \frac{8}{9\pi q^2} + G^0 + (\lambda)_1, \qquad G_{s_2} = -\frac{\cos q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{2q \sin q\pi} + (\lambda)_1.$$

Dann ergibt (69) für Γ die Entwicklung

$$\Gamma = -\frac{1}{q^2}\left\{-\frac{1}{6\pi}\frac{1}{\lambda} + \frac{4}{9\pi q^2} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4\pi}(\tau - \underline{\tau})(\tau - \tau \pm 2\pi) - \frac{\cos q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{2q \sin q\pi} + (\lambda)_1\right\}.$$

Mit

$$(94) \qquad (\Lambda^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} D^2 + \lambda & 2qD \\ -2qD & D^2 - 3q^2 + \lambda \end{pmatrix}$$

bekommt man dann den gesuchten Greenschen Tensor $(G_{\alpha\beta}) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3\pi q^2} - \frac{\cos q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{2q \sin q\pi} & \frac{1}{\pi q}(\tau - \underline{\tau} \pm \pi) - \frac{\sin q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{q \sin q\pi} \\ \frac{-1}{\pi q}(\tau - \underline{\tau} \pm \pi) + \frac{\sin q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{q \sin q\pi} & \frac{2}{\pi q^2} - \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4\pi}(\tau - \tau)(\tau - \underline{\tau} \pm 2\pi) - 2\frac{\cos q(\tau - \underline{\tau} \pm \pi)}{q \sin q\pi} \end{pmatrix}.$$

Leipzig, den 31. Dezember 1928.

(Eingegangen am 7. August 1929.)

Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen. I.

Von

Erich Kähler in Hamburg.

Obwohl in der Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen die Topologie nicht mehr in so reiner Form wie in der Riemannschen Funktionentheorie die wesentlichen analytischen Eigenschaften der Funktionen zu erfassen vermag, so gibt doch auch hier die Betrachtung der entsprechenden vierdimensionalen Räume erst die richtige Einsicht in die analytischen Verhältnisse.

Als Beitrag zur Topologie der Funktionen zweier Variablen wird im folgenden in Analogie zu der bekannten Formel $p = \frac{w}{2} - n + 1$ die Linearkombination $P_2 - 2P_1$ aus den Bettischen Zahlen einer vierdimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit durch deren „Blätterzahl“ und Verzweigungscharakter dargestellt.

§ 1.

Den Wertebereich zweier komplexen Veränderlichen x, y denke man sich in folgender Weise durch eine geschlossene vierdimensionale Mannigfaltigkeit veranschaulicht. Man projiziere die x-Ebene stereographisch auf eine Kugel X, analog die y-Ebene auf eine Kugel Y und ordne irgendeinem Punkte auf X irgendeinen Punkt auf Y zu. Die Gesamtheit der der so enthaltenen Paare (x, y) stellt dann den komplexen (x, y)-Raum dar. Aus dieser Erklärung folgt, daß die beiden unendlich fernen Gebilde $x = \infty$ und $y = \infty$ als zwei verschiedene der Kugel äquivalente zweidimensionale Mannigfaltigkeiten anzusehen sind, die nur den Punkt $(x = \infty,\ y = \infty)$ gemein haben.

Eine Umgebung eines Punktes (x_0, y_0) ist definiert durch die Ungleichungen

$$|x - x_0| \leqq \varrho_1, \qquad |y - y_0| \leqq \varrho_2,$$

wobei für den Fall, daß $x_0 = \infty$ oder $y_0 = \infty$ ist, die Größen $\frac{1}{x}$ bzw. $\frac{1}{y}$ an Stelle von $x - x_0$ bzw. $y - y_0$ zu setzen sind[1]).

Unter einer analytischen (algebraischen) Kurve ist die durch eine monogene analytische (algebraische) Relation zwischen x und y im (x, y)-Raum definierte geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit zu verstehen. Läßt sich eine solche Kurve K in der Umgebung einer Stelle (x_0, y_0) in der Form

$$\mathfrak{P}(x - x_0 / y - y_0) = 0$$

darstellen, wo $\mathfrak{P}$ eine mit Gliedern erster Ordnung beginnende Potenzreihe darstellt, so heißt (x_0, y_0) ein einfacher Punkt von K.

Eine algebraische Funktion $z(x, y)$ ist definiert durch eine irreduzible algebraische Gleichung

$$f(x, y, z) = 0.$$

Ist N der Grad dieser Gleichung in bezug auf z, so gehören zu einem Punkte (x_0, y_0) im allgemeinen N „darüberliegende" Funktionselemente

$$z_1(x, y),\ z_2(x, y),\ \ldots,\ z_N(x, y)$$

von $z(x, y)$, welche sich in der Umgebung von (x_0, y_0) meromorph verhalten, d. h. als Quotient zweier Potenzreihen nach $(x - x_0)$ und $(y - y_0)$ darstellen lassen. Diejenigen Stellen (x_0, y_0), wo sich diese N Funktionselemente nicht mehr sämtlich meromorph verhalten, erfüllen gewisse algebraische Kurven

$$(1) \qquad Q_1(x, y) = 0,\ \ Q_2(x, y) = 0,\ \ \ldots,\ \ Q_\lambda(x, y) = 0,$$

die die Verzweigungsgebilde von $z(x, y)$ bestimmen. Ist (x, y) ein einfacher Punkt einer solchen Kurve, etwa von $Q_i = 0$, und

$$(2) \qquad q(x - x_0,\ y - y_0) = 0$$

eine holomorphe Darstellung von $Q_i = 0$ in der Umgebung von (x_0, y_0), nehmen wir ferner an, daß (x_0, y_0) keiner anderen der Kurven (1) angehört, so können diejenigen Zweige von $z(x, y)$, die sich in (x_0, y_0) nicht meromorph verhalten, in der Form

$$(3) \quad z(x, y) = a_0(x, y) + a_1(x, y)\, q^{\frac{1}{\nu}} + a_2(x, y)\, q^{\frac{2}{\nu}} + \ldots + a_{\nu-1}(x, y)\, q^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

dargestellt werden, wo die $a_i(x, y)$ gewisse in der Umgebung von (x_0, y_0) meromorphe Funktionen bezeichnen. Es sind also in einem solchen Punkte ν von den N Zweigen durch ein und denselben Ausdruck (3)

---

[1]) Wenn im folgenden nichts Besonderes gesagt wird, ist für $x_0 = \infty$ $(y_0 = \infty)$ überall $x - x_0$ (bzw. $y - y_0$) durch $\frac{1}{x}$ $\left(\text{bzw. } \frac{1}{y}\right)$ zu ersetzen.

gegeben, indem man der Wurzel $q^{\frac{1}{\nu}}$ ihre ν Bestimmungen erteilt. Die Entwicklung (3) bezeichnen wir als ein zur Stelle (x_0, y_0) gehöriges Funktionenelement von $z(x, y)$.

In den Punkten (x_0, y_0) einer Kurve $Q_i = 0$, wo die Entwicklung (2) mit Gliedern höherer Ordnung beginnt oder zugleich eine andere Kurve $Q_k = 0$ hindurchgeht, läßt sich $z(x, y)$ im allgemeinen nicht mehr in der Form (3) darstellen. Zur Definition der zugehörigen Funktionselemente nehmen wir in diesem Falle die in der Umgebung von $x_0, y_0, z(x_0, y_0)$ irreduziblen Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_\nu(x, y, z) = 0$$

denen die einzelnen Zweige von $z(x, y)$ genügen.

§ 2.

Durch Übertragung der von den Riemannschen Flächen geläufigen Vorstellungen ist es naheliegend, der algebraischen Funktion $z(x, y)$ eine über dem (x, y)-Raum N-fach ausgebreitete Riemannsche Mannigfaltigkeit R zuzuordnen, indem man zur Festlegung eines Punktes auf R den „darunter“ liegenden Punkt (x_0, y_0) im (x, y)-Raum und das zugehörige Funktionselement $z_0(x, y)$ von $z(y, x)$ benutzt. Als Umgebung eines Punktes (x_0, y_0, z_0) auf R ist dann die Gesamtheit der Punkte zu verstehen, die man erfaßt, wenn man in dem zugehörigen Funktionselement $z_0(x, y)$ die Variablen x, y eine Umgebung von x_0, y_0 durchlaufen läßt

Den Verzweigungspunkten einer Riemannschen Fläche entsprechen hier die (zweidimensionalen) Verzweigungskurven, die aus den über den Kurven (1) liegenden Stellen von R bestehen, wo sich $z(x, y)$ nicht meromorph verhält. Ist $(x_0, y_0, z_0(x, y))$ ein Punkt einer über $Q_i = 0$ liegenden Verzweigungskurve K_i, so erhält man alle Punkte von K_i, indem man das Funktionselement $z_0(x, y)$ auf der Kurve $Q_i = 0$ analytisch fortsetzt. Diejenigen Stellen einer solchen Kurve K_i, die über den einfachen Punkten von $Q_i = 0$ liegen und nicht zugleich einer anderen Verzweigungskurve angehören, nennt man nach Wirtinger Verzweigungsstellen erster Art, die übrigen Verzweigungsstellen zweiter Art. In der Umgebung einer Stelle erster Art von K_i gilt für $z(x, y)$ eine Darstellung von der Form (3), und zwar ist der Wurzelexponent ν, welcher angibt, wieviel „Blätter“ sich um K_i herumwinden, für alle Punkte erster Art von K_i derselbe. Wir nennen ν die Windungszahl, $\nu - 1$ die Ordnungszahl der Verzweigungskurve.

Die Verzweigungsstellen zweiter Art treten nur in endlicher Anzahl auf. Stoßen in einem solchen Punkte μ Blätter von R zusammen, so heiße $\mu - 1$ die Ordnungszahl dieser Verzweigungsstelle.

Betrachten wir einige Beispiele.

1. Der Riemannsche Raum R der Funktion

$$z(x, y) = \sqrt[N]{Q(x, y)},$$

wo $Q(x, y)$ ein irreduzibles Polynom vom Grade m bezüglich x, n bezüglich y bezeichnet, besteht aus N über dem (x, y)-Raum ausgebreiteten vierdimensionalen Blättern, die längs der Kurve $Q(x, y) = 0$ zusammenhängen. Ist μ der größte gemeinsame Teiler von N und m, so liegen über $x = \infty$ μ Verzweigungskurven mit der Windungszahl $\frac{N}{\mu}$; analog gehören zu $y = \infty$ ν Verzweigungskurven mit der Windungszahl $\frac{N}{\nu}$, wenn ν der größte gemeinsame Teiler von n und N ist.

Die im Endlichen liegenden Verzweigungsstellen zweiter Art bestimmen sich durch die drei Gleichungen

$$Q(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Nehmen wir an, daß die $m + n$ unendlich fernen Punkte von $Q = 0$ sämtlich voneinander und von (∞, ∞) verschieden sind, so liegen über $x = \infty$ für $\mu \neq N$ n und über $y = \infty$ für $\nu \neq N$ m Verzweigungsstellen zweiter Art mit der Ordnungszahl $N - 1$, die den Schnittpunkten von $x = \infty$ bzw. $y = \infty$ mit $Q = \infty$ entsprechen. Dazu kommen noch die über $(x = \infty,\ y = \infty)$ liegenden Verzweigungsstellen zweiter Art.

Aus der Entwicklung

$$\sqrt[N]{Q} = x^{\frac{m}{N}} y^{\frac{n}{N}} \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

ersieht man leicht, daß die N Zweige von $\sqrt[N]{Q}$ über (∞, ∞) in $\frac{N}{\varrho}$ Gruppen von je ϱ $\left(= \text{kl. gem. Vielf. von } \frac{N}{\mu}, \frac{N}{\nu}\right)$ analytisch zusammenhängenden Zweigen zerfallen. Demnach gehören zu (∞, ∞) $\frac{N}{\varrho}$ Verzweigungsstellen $(\varrho - 1)$-ter Ordnung.

2. Bei der durch

$$z^3 - 3xz + 2y = 0$$

definierten Funktion $z(x, y)$ [2]) liegen über $x^3 - y^2 = 0$ und $x = \infty$ je eine Verzweigungskurve erster Ordnung, über $y = \infty$ eine Verzweigungskurve zweiter Ordnung. Verzweigungsstellen zweiter Art gibt es zwei, nämlich über $(x = 0,\ y = 0)$ und $(x = \infty,\ y = \infty)$ je eine Stelle zweiter Ordnung.

---

[2]) Vgl. K. Brauner, Hamb. Abh. 6 (1928), S. 4.

§ 3.

Die Riemannsche Mannigfaltigkeit R einer algebraischen Funktion $z(x, y)$ ist ein geschlossener vierdimensionaler Raum. Es gehören daher zu R drei Bettische Zusammenhangszahlen P_1, P_2, P_3, wo P_ν gleich der um 1 vermehrten Maximalzahl der in bezug auf Homologien unabhängigen geschlossenen ν-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in R ist. Nach einem allgemeinen Satze von Poincaré gilt $P_1 = P_3$, so daß nur die beiden Zahlen P_1 und P_2 in Frage kommen.

Da diesen auch eine große funktionentheoretische Bedeutung zukommt, wird man wünschen, sie aus den Daten der Mannigfaltigkeit R, d. h. aus Blätterzahl und Verzweigungscharakter von R zu berechnen. Der Zusammenhang zwischen P_1, P_2 einzeln und diesen Bestimmungsstücken von R scheint recht komplizierter Natur zu sein; dagegen ist es leicht, die lineare Kombination $P_2 - 2P_1$ durch jene Elemente auszudrücken.

Man denke sich R in lauter vierdimensionale einfach zusammenhängende [3]) Zellen σ_4 eingeteilt, deren drei-, zwei- und eindimensionale Begrenzungsstücke $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ ebenfalls einfach zusammenhängende Zellen sind. Bezeichnet man dann die Anzahl der σ_ν mit A_ν und die Zahl der Eckpunkte der Teilung mit A_0, so gilt nach Poincaré die Beziehung

$$(4) \quad A_4 - A_3 + A_2 - A_1 + A_0 = 2 - (P_1 - 1) + (P_2 - 1) - (P_3 - 1) = 3 + P_2 - 2P_1.$$

Es handelt sich also darum, den Raum R geeignet in Zellen zu teilen, so daß sich am Ende alles Zufällige der Einteilung weghebt und nur die maßgebenden Bestimmungsstücke von R auf der linken Seite der letzten Gleichung übrigbleiben. Dies gelingt in folgender Weise.

§ 4.

Es seien

$$(5) \qquad Q_1(x, y) = 0, \quad Q_2(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad Q_\lambda(x, y) = 0$$

die Gleichungen der Kurven, über denen Verzweigungskurven von R liegen.

Wir können voraussetzen, daß zu den unendlich fernen Kurven $x = \infty$ und $y = \infty$ keine Verzweigungskurven gehören und ferner die Schnittpunkte der Kurven (5) mit $x = \infty$ und $y = \infty$ sämtlich voneinander verschieden sind. Durch eine birationale Transformation

$$(6) \qquad x' = a + \frac{1}{x}, \qquad y' = b + \frac{1}{y},$$

[3]) Eine ν-dimensionale Zelle heiße einfach zusammenhängend, wenn sie als eindeutiges stetiges Abbild einer ν-dimensionalen Kugel: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_\nu^2 \leqq 1$ angesehen werden kann.

die zugleich eine umkehrbar eindeutige Abbildung darstellt, läßt sich das jedenfalls erreichen.

Das Polynom

$$Q(x, y) = Q_1(x, y) \cdot Q_2(x, y) \dots Q_l(x, y)$$

ist bezüglich x vom Grade

$$m = \sum m_i,$$

bezüglich y vom Grade

$$n = \sum n_i,$$

wenn m_i, n_i die entsprechenden Grade von Q_i sind.

Betrachten wir nun die Kurvenschar

$$Q(x, y) = \text{konst.} = a$$

im (x, y)-Raum. Irgend zwei solche Kurven $Q = a$, $Q = a'$ schneiden sich in den $(m + n)$ als verschieden vorausgesetzten unendlich fernen Punkten von $Q = 0$ und nur in diesen.

Das zweidimensionale Gebilde $Q(x, y) = a$ variiert stetig mit dem Punkte a der komplexen a-Ebene, wenn man den (x, y)-Raum in der oben dargelegten Weise als geschlossen ansieht. Konvergiert a gegen ∞, so geht $Q = a$ stetig in das aus den beiden Kurven $x = \infty$, $y = \infty$ bestehende unendlich ferne Gebilde über. Durch jeden Punkt (x_0, y_0) mit Ausnahme jener oben erwähnten $(m + n)$ Punkte geht eine und nur eine Kurve der Schar.

Für allgemeine a stellt die Gleichung

$$Q(x, y) - a = 0 \tag{7}$$

eine geschlossene singularitätenfreie Fläche S_a vom topologischen Geschlecht

$$\pi = (m - 1)(n - 1)$$

dar. Sind jedoch die drei Gleichungen

$$Q = a, \quad Q_x = 0, \quad Q_y = 0 \tag{8}$$

gleichzeitig erfüllbar — es gibt immer solche singulären a-Werte, stets aber nur endlich viele —, so ist das funktionentheoretische Geschlecht der Kurve $Q - a = 0$ kleiner als π, ja es kann vorkommen, daß die Gleichung (7) in verschiedene irreduzible Faktoren zerfällt. Das entsprechende zweidimensionale Gebilde S_a zeigt dann in den durch (8) bestimmten Punkten singuläres Verhalten.

§ 5.

Mit Hilfe der Kurvenschar

$$Q(x, y) = a$$

läßt sich leicht eine geeignete Netzeinteilung des Riemannschen Raumes R herstellen.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$ die von 0 verschiedenen singulären a-Werte. Man teile die komplexe a-Ebene so in $2k$ Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2k}$, daß $a = 0$, $a = a_1$, $a = a_2$, $\ldots$, $a = a_k$, $a = \infty$ die einzigen Eckpunkte sind. Sodann ordne man jedem Gebilde S_a für alle a innerhalb und auf dem Rande von Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, 2k)$ eine Eulersche Polyederteilung $\Pi_i(a)$ zu, die mit a stetig variiert und die $(m + n)$ unendlich fernen Punkte der S_a mit unter den Eckpunkten enthält. Da Δ_i einfach zusammenhängend ist und keinen der singulären a-Werte im Innern enthält, kann man stets eine solche „Netzschar" finden.

Für die auf einer Dreieckseite liegenden a sind dem Gebilde S_a die beiden Polyederteilungen $\Pi_\mu(a)$, $\Pi_\nu(a)$ zugeordnet, die von den angrenzenden Dreiecken Δ_μ, Δ_ν herrühren. Wir ordnen daher den S_a auf einer solchen Seite $\alpha_{\mu\nu}$ eine mit a stetig variierende Teilung $\Pi_{\mu\nu}(a)$ zu, die sowohl $\Pi_\mu(a)$ als $\Pi_\nu(a)$ umfaßt. Schließlich sollen für die Gebilde S_0, S_{a_1}, S_{a_2}, $\ldots$, S_{a_k}, S_∞, die den Ecken entsprechen, sämtliche von den anstoßenden Dreiecken und Seiten herrührenden Teilungen zu einer Polyederteilung $\Pi(0), \Pi(a_1), \ldots, \Pi(a_i), \Pi(\infty)$ zusammengefaßt werden. Auf diese Weise ist jedem Gebilde S_a ein Polyedernetz $\Pi(a)$ zugeordnet.

Mit Hilfe dieses Netzsystems erklären wir zunächst eine Zellenteilung T des (x, y)-Raumes, indem wir folgendes Begrenzungsgebilde G zugrunde legen:

G enthält alle und nur die Punkte (x, y), für die a auf einer Seite der Dreiecke Δ_i oder (x, y) auf einer Kante der Teilung $\Pi(a)$ liegt.

Es bezeichne $\Sigma_2(a)$ irgendeine Seitenfläche, $\Sigma_1(a)$ irgendeine Kante, $\Sigma_0(a)$ irgendeine Ecke der Teilung $\Pi(a)$. Erteilt man dem Parameter a alle Werte, die dem Innern oder dem Rande eines der Dreiecke Δ_i angehören, so erzeugen $\Sigma_2(a)$ eine Zelle, $\Sigma_1(a)$ ein dreidimensionales Begrenzungsstück (Hyperseite), $\Sigma_0(a)$ [4]) ein zweidimensionales Begrenzungselement (Hyperkante) von T. Durchläuft a eine Dreieckseite, so erzeugen $\Sigma_2(a)$ eine Hyperseite, $\Sigma_1(a)$ eine Hyperkante, $\Sigma_0(a)$ [5]) eine Kante von T. Gibt man schließlich a einen der Werte $0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \infty$, so sind die Seitenflächen, Kanten, Ecken der entsprechenden Teilung $\Pi(a)$ bzw. Hyperkanten, Kanten und Ecken von T.

Für einen im Innern der Dreiecke Δ_i liegenden Punkt a seien σ_2^i, σ_1^i, σ_0^i die Anzahlen der Seitenflächen, Kanten und Ecken von $\Pi(a)$. Gehört a der Dreieckseite α_{ik} an, so seien σ_2^{ik}, σ_1^{ik}, σ_0^{ik} die entsprechenden Zahlen. Schließlich für $a = 0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \infty$ mögen diese Anzahlen mit σ_2^0, σ_1^0, σ_0^0 bzw. $\sigma_2^{a_i}$, $\sigma_1^{a_i}$, $\sigma_0^{a_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$, σ_2^∞, σ_1^∞, σ_0^∞ bezeichnet werden.

[4]) Hierbei sind die $m + n$ unendlich fernen Ecken auszuschließen, da sie allen Gebilden $Q = a$ angehören.

[5]) Auch hier sind die unendlich fernen Ecken auszuschließen.

Hieraus bestimmen sich die Zahlen $A_4, A_3, \ldots, A_0$ der Teilung T folgendermaßen:

Die Zellen von T werden erzeugt, wenn man jedem der $2k$ Dreiecke Δ_i eine Seitenfläche $\Sigma_2(a)$ der Teilung $\Pi_i(a)$ zuordnet; es ist also

$$A_4 = \sum_i \sigma_2^i.$$

Die Hyperseiten entstehen durch Zuordnung der Dreiecke Δ_i zu den Kanten $\Sigma_1(a)$ von $\Pi_i(a)$ oder der Dreieckseiten α_{ik} zu den $\Sigma_2(a)$ von $\Pi_{ik}(a)$. Man hat demnach

$$A_3 = \sum \sigma_1^i + \sum \sigma_2^{ik}.$$

Die Hyperkanten ergeben sich durch Zuordnung der Δ_i zu den $\Sigma_0(a)$ [5]) von $\Pi_i(a)$, der α_{ik} zu den $\Sigma_1(a)$ der $\Pi_{ik}(a)$, der Punkte $0, a_i, \infty$ zu den $\Sigma_2(a)$. Danach ist

$$A_2 = \sum (\sigma_0^i - m - n) + \sum \sigma_1^{ik} + \sum \sigma_2^{a_i} + \sigma_2^0 + \sigma_2^\infty.$$

Für die Zahl der Kanten und Ecken berechnet sich in derselben Weise

$$A_1 = \sum (\sigma_0^{ik} - m - n) + \sum \sigma_1^{a_i} + \sigma_1^0 + \sigma_1^\infty,$$
$$A_0 = \sum (\sigma_0^{a_i} - m - n) + \sigma_0^0 + \sigma_0^\infty - m - n \text{ [6])}.$$

Für den (x, y)-Raum hat demnach die Poincarésche alternierende Summe

$$A_4 - A_3 + A_2 - A_1 + A_0$$

den Wert

$$(9) \qquad \sum (\sigma_2^i - \sigma_1^i + \sigma_0^i) - \sum (\sigma_2^{ik} - \sigma_1^{ik} + \sigma_0^{ik}) + \sum (\sigma_2^{a_i} - \sigma_1^{a_i} + \sigma_0^{a_i})$$
$$+ (\sigma_2^0 - \sigma_1^0 + \sigma_0^0) + (\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty + \sigma_0^\infty) - m - n,$$

und zwar muß dies gleich 4 sein, da für den (x, y)-Raum $P_2 = 3$, $P_1 = 1$ ist [7]).

Aus der eben beschriebenen Teilung T des (x, y)-Raumes läßt sich sofort eine zulässige Polyederteilung Θ der Riemannschen Mannigfaltigkeit R herstellen, wenn man das Teilungsnetz von T in sämtliche N Blätter von R übertragen denkt. In der Tat sind dann alle Zellen, Hyperseiten, Hyperkanten und Kanten von Θ einfach zusammenhängend, da wir die Teilung so gewählt haben, daß die Verzweigungsgebilde mit zur Begrenzung gehören, und insbesondere die Verzweigungsstellen zweiter Art, sowie die über den $(m + n)$ unendlich fernen Punkten von $Q = 0$ liegenden Stellen mit unter den Ecken der Teilung auftreten.

---

[6]) Um die unendlich fernen Ecken nicht mehrfach zu zählen, wollen wir sie nur bei $Q = 0$ mitzählen.

[7]) Vgl. Picard-Simart, Fonctions algébr. de deux variables indépendantes **1**, p. 41.

Für die Zahlen A_4, A_3 erhält man jetzt offenbar

$$(10) \qquad \begin{aligned} A_4 &= N\sum \sigma_2^i, \\ A_3 &= N\sum \sigma_1^i + N\sum \sigma_2^{ik}. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Hyperkanten von Θ, die über den durch Zuordnung der A_i und α_{ik} zu den $\Sigma_0(a)$ bzw. $\Sigma_1(a)$ erklärten Hyperkanten von T liegen, ist durch

$$N\sum(\sigma_0^i - m - n) + N\sum \sigma_1^{ik}$$

gegeben.

Dazu kommen noch die zu S_{a_1}, $S_{a_2}, \ldots, S_{a_k}$, S_∞ gehörenden Hyperkanten, das sind im ganzen

$$N\sum \sigma_2^{a_i} + N\sigma_2^\infty$$

und endlich die über $Q = 0$ liegenden Hyperkanten, deren Anzahl C_2 später ermittelt werden soll. Es ist also

$$(11) \qquad A_2 = N\sum(\sigma_0^i - m - n) + N\sum \sigma_1^{ik} + N\sum \sigma_2^{a_i} + N\sigma_2^\infty + C_2.$$

Die Zahl der Kanten, die sich durch Zuordnung der α_{ik} zu den N-fach zu zählenden Ecken der Teilung $\Pi_{ik}(a)$ ergeben, ist $N\sum(\sigma_0^{ik} - m - n)$. Zu $Q = a_1$, $Q = a_2, \ldots, Q = a_k$, $Q = \infty$ gehören

$$N\sum \sigma_1^{a_i} + N\sigma_1^\infty$$

Kanten. Bezeichnet man die Anzahl der von $Q = 0$ herrührenden Kanten mit C_1, so hat man

$$(12) \qquad A_1 = N\sum(\sigma_0^{ik} - m - n) + N\sum \sigma_1^{a_i} + N\sigma_1^\infty + C_1.$$

Was schließlich die Ecken unserer Teilung betrifft, so liegen über $Q = a_1$, $Q = a_2, \ldots, Q = a_n$, $Q = \infty$ im ganzen

$$N\sum(s_0^{a_i} - m - n) + N(s_0^\infty - m - n),$$

die nicht zugleich über $Q = 0$ liegen. Bedeutet C_0 die Zahl der über $Q = 0$ liegenden Ecken, so ist

$$(13) \qquad A_0 = N\sum(\sigma_0^{a_i} - m - n) + N(\sigma_0^\infty - m - n) + C_0.$$

Aus (10) bis (13) bestimmt sich somit

$$\begin{aligned} A &= A_4 - A_3 + A_2 - A_1 + A_0 \\ &= N\sum(\sigma_2^i - \sigma_1^i + \sigma_0^i) - N\sum(\sigma_2^{ik} - \sigma_1^{ik} + \sigma_0^{ik}) + N\sum(\sigma_2^{a_i} - \sigma_1^{a_i} + \sigma_0^{a_i}) \\ &\quad + N(\sigma_2^\infty - \sigma_1^\infty + \sigma_0^\infty) - N(m+n) + C_2 - C_1 + C_0. \end{aligned}$$

Ziehen wir davon das N-fache des Ausdrucks (9), der ja den Wert 4 hat, ab, so ergibt sich

$$A - 4N = C_2 - C_1 + C_0 - N(\sigma_2^0 - \sigma_1^0 + \sigma_0^0),$$

also

$$P_2 - 2P_1 = 4N - 3 + C_2 - C_1 + C_0 - N(\sigma_2^0 - \sigma_1^0 + \sigma_0^0). \tag{14}$$

Die hier auftretenden Größen C, σ beziehen sich alle auf $Q = 0$ und die darüberliegenden Verzweigungsgebilde. Sind s_2^i, s_1^i, s_0^i die Anzahlen der auf $Q_i = 0$ liegenden Hyperkanten, Kanten und Ecken von T, so hat man in

$$s_2^i - s_1^i + s_0^i = \gamma_i \tag{15}$$

eine Zahl, die nur von der Beschaffenheit der Kurve $Q_i = 0$, nicht aber von der Wahl der Polyederteilung abhängt.

Weiter ist

$$\sigma_2^0 = \sum_i s_2^i, \qquad \sigma_1^0 = \sum_i s_1^i. \tag{16}$$

Über $Q_i = 0$ können mehrere Verzweigungskurven K_i, K_i', K_i'', ... liegen. Bezeichnet man mit v_i die Summe deren Ordnungszahlen[8]), so liegen über $Q_i = 0$ $(N - v_i) \cdot s_2^i$ Hyperkanten und $(N - v_i) s_1^i$ Kanten von Θ, und es gilt

$$C_2 = \sum_1^\lambda (N - v_i) s_2^i, \qquad C_1 = \sum_1^\lambda (N - v_i) s_1^i. \tag{17}$$

Es seien

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2), \ldots, (\alpha_h, \beta_h) \tag{18}$$

die nicht einfachen Punkte von $Q = 0$, d. h. die Schnittpunkte und die nicht einfachen Punkte der $Q_i = 0$. Unter diesen mögen ν_i zu $Q_i = 0$ gehören. Dann ist offenbar

$$\sigma_0^0 = \sum_1^\lambda (s_0^i - \nu_i) + h. \tag{19}$$

Sind $w_1, w_2, \ldots, w_h$ die Summen der Ordnungszahlen der Verzweigungsstellen erster und zweiter Art, die über den Punkten (18) liegen, so entsprechen den letzteren im ganzen

$$(N - w_1) + (N - w_2) + \ldots + (N - w_h) = hN - w \qquad \left(w = \sum_1^\lambda w_\nu\right)$$

Eckpunkte von Θ. Danach berechnet sich für C_0:

$$C_0 = \sum_1^\lambda (N - v_i)(s_0^i - \nu_i) + Nh - w. \tag{20}$$

[8]) Wird $Q_i = 0$ von $K_i, K_i', \ldots$ λ_i-fach bzw. λ_i'-fach usw. überdeckt, so ist $v_i = \lambda_i \mu_i + \lambda_i' \mu_i' + \ldots$ zu setzen, wenn $\mu_i + 1$, $\mu_i' + 1$ usw. die Windungszahlen von $K_i, K_i', \ldots$ bezeichnen.

Aus (15), (17) und (20) folgt sodann

$$C_2 - C_1 + C_0 = \sum_1^\lambda (N - \nu_i)(\gamma_i - \nu_i) + Nh - w,$$

ferner aus (16) und (19):

$$N(\sigma_2^0 - \sigma_1^0 + \sigma_0^0) = N \sum_1^\lambda (\gamma_i - \nu_i) + Nh,$$

und nach Einführung in (14):

$$P_2 - 2P_1 = 4N - 3 - w - \sum_1^\lambda \nu_i(\gamma_i - \nu_i) \tag{21}$$

als einfachste Darstellung des Ausdrucks $P_2 - 2P_1$.

Die Zahl γ_i hängt in einfacher Weise mit dem funktionentheoretischen Geschlecht π_i der Kurve $Q_i = 0$ zusammen. Wenn man die Größe $2 - 2\pi_i$ durch Anwendung der Eulerschen Polyederformel auf die Riemannsche Fläche von $Q_i = 0$ ermittelt, rechnet man jeden mehrfachen Punkt so oft, als durch ihn Kurvenzweige hindurchgehen. In (15) ist aber jeder mehrfache Punkt nur einfach zu zählen. Bezeichnet man daher allgemein als Ordnung eines Kurvenpunktes die von 1 verminderte Zahl der hindurchgehenden Kurvenzweige, als Durchdringungszahl der Kurve die Summe der Ordnungen sämtlicher Kurvenpunkte, so ist

$$\gamma_i = 2 - 2\pi_i - r_i, \tag{22}$$

wenn r_i diese Durchdringungszahl herstellt.

Hiernach ergibt sich als endgültiger Ausdruck für $P_2 - 2P_1$:

$$P_2 - 2P_1 = 4N - 3 - w - \sum_1^\lambda \nu_i(2 - 2\pi_i - r_i - \nu_i), \tag{23}$$

wo N die Blätterzahl von R, w die Summe der Ordnungen aller Verzweigungsstellen über den Punkten (18), ν_i die Summe der Ordnungen der über $Q_i = 0$ liegenden Verzweigungskurven, π_i das Geschlecht, r_i die Durchdringungszahl von $Q_i = 0$, r_i die Anzahl der auf $Q_i = 0$ fallenden nicht einfachen Punkte des aus $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0, \ldots, Q_\lambda = 0$ bestehenden Kurvenbildes bedeuten.

Bei der Ableitung der letzten Formel war vorausgesetzt, daß über $x = \infty$ und $y = \infty$ keine Verzweigungskurven liegen. Da man dies aber stets durch eine Transformation der Form (6) erreichen kann und die in (23) auftretenden Größen alle hierbei invariant bleiben, so ist jene Voraussetzung überflüssig.

Zur Erläuterung möge obige Formel auf die durch die Gleichung

$$z^3 - 3xz + 2y = 0$$

definierte Funktion $z(x, y)$ angewandt werden[9]). Man hat drei Kurven im (x, y)-Raum

$$Q_1\colon\ x^3 - y^2 = 0, \qquad Q_2\colon\ x = \infty, \qquad Q_3\colon\ y = \infty,$$

über denen Verzweigungskurven liegen, und zwar ist

$$\begin{aligned} v_1 &= 1, & v_2 &= 1, & v_3 &= 2, \\ \pi_1 &= 0, & \pi_2 &= 0, & \pi_3 &= 0, \\ r_1 &= 0, & r_2 &= 0, & r_3 &= 0, \\ \nu_1 &= 2, & \nu_2 &= 1, & \nu_3 &= 1, \end{aligned}$$

ferner

$$N = 3, \qquad w = 2 + 2 = 4,$$

und daher

$$P_2 - 2P_1 = 2.$$

[9]) Vgl. Beispiel 2, S. 261.

(Eingegangen am 27. Juli 1929.)

Eine Anwendung der eindimensionalen Greenschen Funktion.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

§ 1.

Wir wollen zunächst auf eine neue Art beweisen, daß eine auf der Strecke von $x = -1$ bis $x = +1$ stetige Funktion $f(x)$ identisch verschwindet, wenn alle Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} x^n f(x)\, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gelten. Die Voraussetzung dieses Satzes läßt sich offenbar auch so fassen, daß alle Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gelten, wobei $P_n(x)$ wie gewöhnlich das n-te Legendresche Polynom bedeutet, dessen Grad ja n ist. Diese Polynome oder auch die normierten Größen $\varphi_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\, P_n(x)$, für welche die Beziehung

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)^2\, dx = 1$$

besteht, erfüllen eine Integralgleichung, deren Kern für $x < \xi$ den Ausdruck

$$(1) \qquad G(x, \xi) = -\frac{1}{2} \lg[(1 - x)(1 + \xi)] - \frac{1}{2} + \lg 2,$$

für $x > \xi$ den durch Vertauschung von x und ξ erhaltenen Ausdruck hat. Er erfüllt als Funktion von x die Gleichungen

$$(2) \qquad ((1 - x^2) y')' - \frac{1}{2} = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} y\, dx = 0, \qquad (1 - x^2) y' \Big|_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

und ist an den Enden der Strecke $-1 \ldots +1$, des Grundgebiets, wie wir sagen, endlich, wenn ξ eine beliebige Stelle im Innern dieses Gebiets bedeutet. Kombiniert man die Differentialgleichung für $y = G(x, \xi)$ mit der Legendreschen Gleichung

$$((1 - x^2)\varphi_n'(x))' + n(n+1)\varphi_n(x) = 0,$$

indem man erstere mit φ_n, letztere mit G multipliziert und subtrahiert, so findet man durch Integration über das Grundgebiet

$$\varphi_n(\xi) = n(n+1)\int_{-1}^{+1} G(x, \xi)\varphi_n(x)\,dx. \tag{3}$$

Man bilde ferner mit der in der Behauptung des zu beweisenden Satzes auftretenden Funktion $f(x)$ die Größe

$$F(x) = \int_{-1}^{+1} G(x, \alpha) f(\alpha)\,d\alpha$$

und setze für G den einen oder andern der Werte (1) ein, je nachdem $\alpha < x$ oder $\alpha > x$, so findet man durch einfache Ausrechnung

$$((1 - x^2)F'(x))' = -f(x); \tag{4}$$

die erste Ableitung $F'(x)$ ist auf dem ganzen Grundgebiet stetig, die zweite wenigstens im Innern desselben, und die zweite der Gleichungen (2) ergibt

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

Man findet ferner auf Grund der Gleichung (3)

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\,dx \int_{-1}^{+1} G(x, \alpha) f(\alpha)\,d\alpha,$$

und wenn man rechts die Integrationen vertauscht

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} d\alpha\, f(\alpha) \int_{-1}^{+1} \varphi_n(x) G(x, \alpha)\,dx.$$

Diese Vertauschung ist erlaubt, weil in dem Ausdruck (1) immer nur Summen von Funktionen je einer der beiden vorkommenden Unabhängigen erscheinen und die Größe $\lg(1 \mp x)$ bis an den Wert $x = \pm 1$ heran integriert werden kann; $n = 0$ gibt (5). Benutzt man in der letzten Gleichung nochmals die Integralgleichung (3), so ergibt sich für $n = 1, 2, \ldots$

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^{+1} f(\alpha)\varphi_n(\alpha)\,d\alpha = 0.$$

Nimmt man noch die Gleichung (5) hinzu, so sieht man, daß auch die Funktion $F(x)$ ebenso wie $f(x)$ zu allen Funktionen $\varphi_n(x)$ orthogonal ist.

Wenn es also eine stetige nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$ gibt, die zu allen Funktionen $\varphi_n(x)$ orthogonal ist, so gibt es auch eine auf dem Grundgebiet stetige Funktion $F(x)$ mit stetiger erster Ableitung auf dem ganzen Grundgebiet, und stetiger zweiter Ableitung im Innern desselben, die zu allen Funktionen $\varphi_n(x)$ orthogonal ist und offenbar wegen der Gleichung (4) nicht identisch verschwindet.

§ 2.

Wir setzen nunmehr

$$\Psi(x) = F(x) - a_0\varphi_0(x) - \ldots - a_{n-1}\varphi_{n-1}(x) \tag{6}$$

und bestimmen die Koeffizienten a so, daß $\Psi(x)$ an den Nullstellen der Funktion $\varphi_n(x)$ verschwindet. Sind diese, die ja zufolge einer bekannten Eigenschaft der Legendreschen Polynome alle im Grundgebiet liegen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so braucht man nur die Gleichungen

$$F(x_\nu) = a_0\varphi_0(x_\nu) + a_1\varphi_1(x_\nu) + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1}(x_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

nach den Unbekannten a aufzulösen; die Determinante der Koeffizienten $\varphi_\mu(x_\nu)$ verschwindet ebensowenig wie die Determinante der Größen

$$x_\nu^\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Hat man die Größen a auf diese Weise bestimmt, so hat die Größe $\Psi(x)$ ebenso wie $F(x)$ und alle $\varphi_n(x)$ im Innern des Grundgebiets stetige erste und zweite Ableitungen, besonders auch an den Stellen x_ν; als Nullstellen von $\Psi(x)$ sind diese also von erster oder höherer Ordnung, und $\Psi(x)/\varphi_n(x)$ bleibt also im ganzen Grundgebiet endlich und stetig, da $\varphi_n(x)$ als Lösung der Legendreschen Gleichung keine Nullstelle von höherer als erster Ordnung besitzt.

Die Funktion $\Psi(x)$ kann nun leicht in ähnlicher Form wie $F(x)$ dargestellt werden:

$$\Psi(x) = \int_{-1}^{+1} G(x,\alpha)\,\psi(\alpha)\,d\alpha - a_0\varphi_0(x). \tag{7}$$

Benutzt man nämlich die Integralgleichungen

$$\varphi_\nu(x) = \nu(\nu+1)\int_{-1}^{+1} G(x,\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha,$$

so findet man

$$\Psi(x) = \int_{-1}^{+1} G(x,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha - \sum_{\nu}^{1,n-1} \nu(\nu+1)\,a_\nu \int_{-1}^{+1} G(x,\alpha)\,\varphi_\nu(\alpha)\,d\alpha - a_0\varphi_0(x);$$

man kommt also auf die Form (7), indem man setzt

$$\psi(x) = f(x) - \sum_{\nu}^{1,n-1} \nu(\nu+1)\, a_\nu \varphi_\nu(x). \tag{8}$$

Da nun $\varphi_0(x) = 1/\sqrt{2}$ ein Festwert ist, so findet man entsprechend der Gleichung (4)

$$((1-x^2)\,\Psi'(x))' = -\psi(x).$$

Kombiniert man diese Gleichung mit der Legendreschen

$$((1-x^2)\,\varphi_n'(x))' = -n(n+1)\,\varphi_n(x),$$

indem man mit $\varphi_n(x)$ und $\Psi(x)$ multipliziert und subtrahiert, so ergibt sich

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\,(\varphi_n(x)\,\Psi'(x) - \varphi_n'(x)\,\Psi(x))] = \varphi_n(x)\,(-\psi(x) + n(n+1)\,\Psi(x))$$

Schreiben wir diese Gleichung nach einem sehr erfolgreichen Gedanken von Herrn Prüfer[1]), der auch den Ausdruck $\Psi(x)$ eingeführt hat, in der Form

$$\frac{\Psi(x)}{\varphi_n(x)}\frac{d}{dx}[(1-x^2)\,(\varphi_n(x)\,\Psi'(x) - \varphi_n'(x)\,\Psi(x))] = -\Psi(x)\,\psi(x) + n(n+1)\,\Psi(x)^2$$

und ergänzen die linke Seite zu einer vollständigen Ableitung, so ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\Psi(x)}{\varphi_n(x)}(1-x^2)\,(\varphi_n(x)\,\Psi'(x) - \varphi_n'(x)\,\Psi(x))\right] = -\Psi(x)\,\psi(x) + n(n+1)\,\Psi(x)^2 + (1-x^2)\left(\frac{\varphi_n(x)\,\Psi'(x) - \varphi_n'(x)\,\Psi(x)}{\varphi_n(x)}\right)^2,$$

und das zweite rechts erscheinende Quadrat ist endlich ebenso wie $\Psi(x)/\varphi_n(x)$. Integriert man nun von -1 bis $+1$, so verschwindet die linke Seite und es kommt

$$0 = -\int_{-1}^{+1} \Psi(x)\,\psi(x)\,dx + n(n+1)\int_{-1}^{+1} \Psi(x)^2\,dx + P, \quad P \geqq 0. \tag{9}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich jetzt leicht ein Widerspruch ableiten, es sei denn, daß $F(x)$ identisch verschwinde. Zunächst ergeben die Gleichungen (7) und (8) und die Definition (6)

$$\int_{-1}^{+1} \Psi(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} (F(x) - a_0\varphi_0(x) - a_1\varphi_1(x) - \ldots - a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)) \times \Big(f(x) - \sum_{\nu}^{1,n-1} \nu(\nu+1)\,a_\nu \varphi_\nu(x)\Big)\,dx,$$

[1]) Math. Annalen **95** (1926), S. 509.

also, da F zu allen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ und diese untereinander orthogonal und normiert sind,

$$\int_{-1}^{+1} \Psi(x)\,\psi(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} F(x)\,f(x)\,dx + \sum_{\nu}^{1,n-1} \nu(\nu+1)\,a_\nu^2.$$

Sodann ergeben die soeben erwähnten Gleichungen und Eigenschaften

$$\int_{-1}^{+1} \Psi(x)^2\,dx = \int_{-1}^{+1} \left(F(x) - a_0\varphi_0(x) - \ldots - a_{n-1}\varphi_{n-1}(x)\right)^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{+1} F(x)^2\,dx + a_0^2 + \sum_{\nu}^{1,n-1} a_\nu^2;$$

die Gleichung (9) wird also

$$0 = -\int_{-1}^{+1} F(x)\,f(x)\,dx + n(n+1)\left\{\int_{-1}^{+1} F(x)^2\,dx + a_0^2\right\}$$
$$+ \sum_{\nu}^{1,n-1} \left(n(n+1) - \nu(\nu+1)\right)a_\nu^2 + P, \quad P \geqq 0,$$

und hier kommt der Widerspruch zutage: das erste Glied rechts ist von n unabhängig, alle andern sind positiv und eins von ihnen wächst über alle Grenzen; die Gleichung ist unmöglich, wenn n hinreichend gewachsen ist, es sei denn, daß der Faktor von $n(n+1)$ verschwinde, daß also auf dem Grundgebiet überall $F(x) = 0$ ist, was zu beweisen war; daraus folgt nach (4) in demselben Umfange $f(x) = 0$, d. h. eine zu allen Legendreschen Polynomen auf der Strecke von $x = -1$ bis $x = +1$ orthogonale stetige Funktion von x verschwindet identisch auf dieser Strecke.

§ 3.

Das erhaltene Ergebnis wird in meinen Integralgleichungen[2]) wie im Courant-Hilbert[3]) abgeleitet aus dem Weierstraßschen Approximationssatze, nach welchem, kurz gesagt, jede stetige Funktion auf einer endlichen Strecke durch Polynome gleichmäßig approximiert werden kann. Umgekehrt sind wir durch die obigen Entwicklungen in der Lage, erst einen sehr allgemeinen Satz über Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Legendreschen Polynome zu geben und dann den Weierstraßschen Approximationssatz zu beweisen. Ersterer Beweis findet sich vollständig in § 33 meiner Integralgleichungen durchgeführt mit dem Ergebnis, daß jede mit ihrer ersten Ableitung auf dem Grundgebiet stetige Funktion, die stückweise stetige Ableitungen zweiter und dritter Ordnung besitzt, nach den Legendreschen

---

[2]) Kneser, Integralgleichungen (2. Aufl., 1922), § 33.

[3]) Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik **1** (1924), § 8.

Polynomen in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickelt werden kann; sie kann also auch gleichmäßig auf dem Grundgebiet durch eine endliche Summe von Legendreschen Polynomen, also überhaupt durch ein Polynom approximiert werden.

Nun kann man die Kurve, die eine stetige Funktion darstellt, durch einen Polygonzug, längs dessen die Ordinate eine eindeutige Funktion der Abszisse ist, mit vorgeschriebener für das ganze Grundgebiet geltender Genauigkeit ersetzen und dann in dem Polygonzuge die Ecken abrunden; die so erhaltene Kurve stellt bei geeigneter Art der Abrundung eine Funktion dar, die den abgeleiteten Darstellungssätzen zufolge nach den Legendreschen Polynomen entwickelt, also durch ein Polynom gleichmäßig approximiert werden kann, womit dasselbe auch für die gegebene stetige Funktion und damit das Weierstraßsche Theorem erwiesen ist.

(Eingegangen am 15. Juli 1929.)

Zur Theorie der Limitierungsverfahren.

(Zweite Mitteilung.)

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

In dieser *zweiten Mitteilung*[1]) sollen die Begriffe und Sätze, die in I entwickelt wurden, erst auf den Fall ausgedehnt werden, daß die in Rede stehenden Grenzprozesse noch von einem Parameter abhängen (III. Teil), sodann auf den Fall, daß mehrdimensionale Grenzprozesse in Betracht gezogen werden (IV. Teil). Da es sich hierbei im großen und ganzen um Übertragungen handelt, deren Form sich zwangsläufig ergibt und deren Einzelheiten meist denen aus I analog sind, wird die Darstellung etwas kürzer gehalten sein.

Überraschend ist auch hier die große Fülle der Anwendungen, die der Kernsatz zu machen erlaubt. Da die ausführliche Darstellung derselben zu großen Raum einnehmen würde, müssen vielfach knappe Andeutungen und skizzenhafte Ausführungen genügen.

Ausdrücklich sei noch betont, daß diese Anwendungen sachlich — von mannigfachen Verschärfungen und Erweiterungen abgesehen — nichts Neues bringen wollen. Sie sollen nur zeigen, daß die Kernsätze, die schließlich alle in dem zuletzt formulierten allgemeinen Kernsatz (§ 10) enthalten sind, eine erstaunliche Fülle von Einzelsätzen, die zum Teil weit auseinanderzuliegen und ganz getrennten Gebieten anzugehören scheinen, als Spezialfälle enthalten. Dadurch wird einmal eine gemeinsame Wurzel aller dieser Sätze aufgedeckt und die Methoden zu ihren Beweisen werden vereinheitlicht und zum Teil erheblich vereinfacht, und auf der andern Seite werden die individuellen Schwierigkeiten beim Beweise jener Einzelsätze vollständig auf die jedesmalige (meist ganz einfache) Verifikation der Voraussetzungen des Kernsatzes zurückgeschoben.

[1]) Die *erste Mitteilung*, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 97—127, soll im folgenden kurz als „I“ bezeichnet werden.

III. Teil.

Grenzprozesse bei Abhängigkeit von einem Parameter.

§ 6.

Die echten Limitierungsverfahren bei Abhängigkeit von einem Parameter.

Wir gehen nun zu dem schon am Ende der Einleitung zu I angedeuteten Fall über, daß $f(x) = f(x, u)$ noch von einem Parameter u abhängt. Dieser sei ebenfalls komplex und aller Werte einer Menge $\mathfrak{U}$ in einer u-Ebene fähig. Ferner sei $|f(x, u)| < K = K(t_1)$ für $0 \leqq t \leqq t_1 < \tau_x$ und alle u in $\mathfrak{U}$. Es handelt sich dann um den Grenzprozeß

(f) $\qquad f(x, u)$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ und alle u in $\mathfrak{U}$.

Wir transformieren nun unter Zuhilfenahme einer Funktion φ, die außer von x und y jetzt auch von dem Parameter u abhängen darf, und unter der Annahme, daß alle auftretenden Integrale existieren, die Funktion $f(x, u)$ in die Funktion

$$g(y, u) = {}^{(\mathfrak{C}_x)}\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x, y, u)\, f(x, u)\, dt$$

und betrachten neben (f) den Grenzprozeß

(g) $\qquad g(y, u)$ für $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_y$ und alle u in $\mathfrak{U}$.

Setzen wir nun voraus, daß für jedes feste u in $\mathfrak{U}$ die allgemeinen Voraussetzungen des § 1 in I sowie die besonderen des dortigen Satzes 1 erfüllt sind, so ist klar, daß bei festem u aus

$$f(x, u) \to a(u) \text{ für } x \to \xi \text{ längs } \mathfrak{C}_x$$

stets folgt, daß auch

$$g(y, u) \to a(u) \text{ strebt für } y \to \eta \text{ längs } \mathfrak{C}_y.$$

Darüber hinaus beweisen wir den

Satz 1a. *Für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ strebe*

$$f(x, u) \to a(u) \quad \textit{gleichmäßig für alle } u \textit{ in } \mathfrak{U}$$

und es sei $a(u)$ dort beschränkt. Dann strebt für $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_y$ auch

$$g(y, u) \to a(u) \quad \textit{gleichmäßig für alle } u \textit{ in } \mathfrak{U},$$

falls — neben der Annahme der Existenz aller auftretenden Integrale —

a) $$^{(\mathfrak{C}_x)}\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x, y, u)\, dt = \Phi(y, u)$$

für $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_y$ gleichmäßig für alle u in $\mathfrak{U}$ gegen 1 strebt, falls ferner

b) *bei festem* x_1 *und* x_2 *auf* $\mathfrak{C}_x$

$$\int_{x_1}^{x_2}{}^{(\mathfrak{C}_x)} |\varphi(x, y, u)|\, dt$$

für $y \to \eta$ *längs* $\mathfrak{C}_y$ *gleichmäßig für alle* u *in* $\mathfrak{U}$ *gegen 0 strebt und falls es*

c) *eine positive Zahl* M *gibt, so daß für alle* x *auf* $\mathfrak{C}_x$, *alle hinreichend nahe bei* η *gelegenen* y *auf* $\mathfrak{C}_y$ *und alle* u *in* $\mathfrak{U}$

$$\int_{x_0}^{x}{}^{(\mathfrak{C}_x)} |\varphi(x, y, u)|\, dt < M$$

bleibt.

Beweis. Wegen

$$g(y,u) - a(u) = \int_{x_0}^{\xi}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(x, y, u)\,(f(x, u) - a(u))\, dt + (\Phi(y, u) - 1)\, a(u)$$

genügt es, mit Rücksicht auf a) und die vorausgesetzte Beschränktheit von $a(u)$ zu zeigen, daß das Integral rechts für $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_y$ gleichmäßig für alle u in $\mathfrak{U}$ gegen 0 strebt. Ist aber $\varepsilon > 0$ gegeben, so kann man $t_1 < \tau_x$ so wählen, daß für $t_1 \leqq t < \tau_x$ und alle u in $\mathfrak{U}$ stets $|f(x,u) - a(u)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ bleibt. Dann ist aber, wenn $x(t_1) = x_1$ gesetzt wird und wenn für $0 \leqq t \leqq t_1$ und alle u in $\mathfrak{U}$ stets $|f(x,u) - a(u)| < K_1$ bleibt, wegen c) für alle schon hinreichend nahe bei η gelegenen y auf $\mathfrak{C}_y$ und alle u in $\mathfrak{U}$

$$\left| \int_{x_0}^{\xi}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi \cdot (f - a)\, dt \right| \leqq K_1 \cdot \int_{x_0}^{x_1}{}^{(\mathfrak{C}_x)} |\varphi(x, y, u)|\, dt + \frac{\varepsilon}{2M} M.$$

Nach Bedingung b) ist dies also $< \varepsilon$ für alle u in $\mathfrak{U}$, sobald y weiterhin auf $\mathfrak{C}_y$ hinreichend nahe an η herangerückt ist. Damit ist der Satz bewiesen. Nach ihm liefert der Übergang von (f) zu (g) insbesondere ein *reguläres Limitierungsverfahren für Funktionenfolgen.*

Wir betrachten nun weiterhin wieder nur „*echte*" Limitierungsverfahren oder Mittelbildungen dieser Art, d. h. solche, bei denen $\varphi(x, y, u)$ außer den bisherigen Bedingungen noch die erfüllt, *reell und nie negativ* zu sein. Dann ist aber die Bedingung c) des Satzes 1a eine unmittelbare Folge von a), so daß nun die Bedingungen a) und b) für seine Gültigkeit ausreichen.

Als konkrete Fälle führen wir etwa zunächst die folgenden beiden an:

1. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe, die wir auf dem Rande $|z| = 1$ oder einem Teile desselben betrachten. Ist sie

auf der Teilmenge $\mathfrak{U}$ desselben gleichmäßig konvergent, streben also die Teilsummen

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \to s(z) \quad \text{für } n \to \infty \text{ gleichmäßig für alle } z \text{ aus } \mathfrak{U}$$

und ist $s(z)$ dort beschränkt, so tun das gleiche auch alle echten Mittelbildungen der $s_n(z)$, etwa die C_1-Mittel

$$t_n(z) = \frac{s_0(z) + s_1(z) + \ldots + s_n(z)}{n+1} \quad \text{für } n \to \infty$$

oder die A-Mittel

$$g(y, z) = (1-y) \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z)\, y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (yz)^n \quad \text{für } y \to 1-0.$$

2. Es sei $F(u)$ eine reelle, integrierbare, beschränkte, mit 2π periodische Funktion der reellen Veränderlichen u und es sei (vgl. I, § 3, 12)

$$f(x, u) = \frac{1}{2}(F(u+2x) + F(u-2x)).$$

Es liege x auf der als Integrationsweg $\mathfrak{C}_x$ zu wählenden Strecke $\frac{\pi}{2} \geqq x > 0$ und u auf einer beliebigen Punktmenge $\mathfrak{U}$ der u-Geraden. Dann sind

$$t_n(u) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, u) \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

die C_1-Mittel $\frac{s_0 + \ldots + s_{n-1}}{n}$ der Teilsummen s_n der Fourierreihe von $F(u)$ an der Stelle u. Da diese Transformation der Funktion $f(x, u)$ in die Folge $t_n(u)$, wie schon mehrfach betont, echt ist, so konvergieren also die $t_n(u)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in $\mathfrak{U}$ gegen $a(u)$, falls dies $f(x, u)$ für $x \to +0$ tut, — also z. B. wenn die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{U}$ im Innern eines Stetigkeitsintervalles von $F(u)$ liegt (was dann $a(u) = F(u)$ zur Folge hat).

§ 7.

Der Kernsatz bei Abhängigkeit von einem Parameter.

Wir definieren nun ganz ähnlich wie in § 4 den Kern $\mathfrak{K}(\mathfrak{U})$ des Grenzprozesses

(f) $\qquad f(x, u)$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ und alle u in $\mathfrak{U}$

folgendermaßen: Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}(x_1, \mathfrak{U})$ den kleinsten konvexen Bereich, der alle Werte $f(x, u)$ mit $x \succ x_1$ auf $\mathfrak{C}_x$ und beliebigem u in $\mathfrak{U}$ enthält. Dann soll $\mathfrak{K}(\mathfrak{U})$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{K}(x, \mathfrak{U})$ mit x auf $\mathfrak{C}_x$ sein.

In gewissen Fällen empfiehlt es sich, noch einen Schritt weiter zu gehen: Ist U_0 eine feste Teilmenge von $\mathfrak{U}$ und U eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{U}$, die U_0 enthält, so sei $\mathfrak{K}_0$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{K}(U)$. Wir nennen $\mathfrak{K}_0$ den Kern des Grenzprozesses

$(\mathfrak{f}_0)$ $\qquad f(x,u)$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ und alle u in $U \to U_0$.

Die analog zu definierenden Bereiche, die sich auf $g(y,u)$ für $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_y$ beziehen, mögen mit

$$\mathfrak{K}'(\mathfrak{U}) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{K}_0'$$

bezeichnet werden. Für diese Bereiche gilt nun folgender

Erweiterter Kernsatz. *Für jedes echte Limitierungsverfahren ist stets*

$$\mathfrak{K}'(\mathfrak{U}) \leqq \mathfrak{K}(\mathfrak{U}) \quad \textit{und} \quad \mathfrak{K}_0' \leqq \mathfrak{K}_0.$$

Beweis. Da nach dem ersten Teil des Satzes auch stets $\mathfrak{K}'(U) \leqq \mathfrak{K}(U)$ ist, so folgt aus ihm sofort, daß auch $\mathfrak{K}_0' \leqq \mathfrak{K}_0$ sein muß. Es genügt also den ersten Teil zu beweisen.

Dessen Beweis verläuft nun ganz parallel zu dem in § 4 gegebenen; man hat nur zu prüfen, daß die Abhängigkeit unserer Funktionen von u keine entscheidenden Änderungen mit sich bringt. Die Hilfssätze lauten jetzt so:

Hilfssatz 1a. Es sei $f(x,u)$ eine beliebige und $\lambda(x,u)$ eine reelle, nicht negative Funktion, die beide für alle x auf $\mathfrak{C}_x$ und alle u in $\mathfrak{U}$ definiert sind. Es seien die Integrale

$$\int_{x_0}^{\xi}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \lambda(x,u)\,dt = \lambda(u) \quad \text{und} \quad \int_{x_0}^{\xi}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \lambda(x,u)\,f(x,u)\,dt = c(u)$$

vorhanden und es sei stets $\lambda(u) > 0$. Liegen dann die Werte von $f(x,u)$ sämtlich (d. h. für alle erlaubten x und u) in der abgeschlossenen Halbebene $\mathfrak{H}$, so liegt für jedes u der Punkt $c(u)$ in der Halbebene $\lambda(u)\cdot\mathfrak{H}$.

Der Beweis ergibt sich aus Hilfssatz 1 in § 4, 2, da für festes u die Werte $f(x,u)$ a fortiori in $\mathfrak{H}$ liegen. Ganz ebenso ergibt sich der

Hilfssatz 2a. Haben $f(x,u)$ und $\lambda(x,u)$, $\lambda(u)$ und $c(u)$ dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 1a und ist K der kleinste konvexe Bereich, der alle Werte $f(x,u)$ enthält, so liegt $c(u)$ für jedes u in $\lambda(u)\cdot\mathsf{K}$.

Treffen wir nun zum Beweise des erweiterten Kernsatzes bezüglich z^* und x_1 genau dieselben Vorbereitungen wie in § 4, 2, so können wir auch jetzt sagen: Nach Hilfssatz 2a liegt — zunächst im Falle $z^* \neq \infty$ — für jedes y auf $\mathfrak{C}_y$ und jedes u in $\mathfrak{U}$ der Wert

$$g_1(y,u) = \int_{x_i}^{\xi}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(x,y,u)\,f(x,u)\,dt \quad \text{in} \quad \lambda(u)\cdot\mathfrak{K}(x_1,\mathfrak{U}),$$

falls

$$\lambda(u) = \lambda(y, u) = \int_{x_1}^{\xi}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(x, y, u)\, dt = \Phi(y, u) - \int_{x_0}^{x_1}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(x, y, u)\, dt$$

positiv ist. Da aber $\lambda(y, u)$ für $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_y$ gleichmäßig für alle u in $\mathfrak{U}$ gegen 1 strebt, so läßt sich $\bar{y}$ auf $\mathfrak{C}_y$ so angeben, daß für alle $y \succ y$ auf $\mathfrak{C}_y$ und alle u in $\mathfrak{U}$ stets $\lambda(y, u) > 0$ ist. Weiter kann man dann $y' \succ \bar{y}$ auf $\mathfrak{C}_y$ so festlegen, daß, wenn die rechts von h_3 gelegene Halbebene vom Nullpunkt aus der Streckung

$$1 : \lambda(y, u) \quad \text{mit} \quad y \succ y' \quad \text{auf } \mathfrak{C}_y \text{ und } u \text{ in } \mathfrak{U}$$

unterworfen wird, sie immer noch rechts von h_2 verbleibt.

Die Punkte $g_1(y, u)$ liegen dann für $y \succ y'$ auf $\mathfrak{C}_y$ und u in $\mathfrak{U}$ sicher rechts von h_2. Nun ist wieder

$$g(y, u) = g_1(y, u) + \varepsilon(y, u) \quad \text{mit} \quad \varepsilon(y, u) = \int_{x_0}^{x_1}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(x, y, u)\, f(x, u)\, dt;$$

und da eine Konstante K existieren soll, so daß $|f(x, u)| < K$ bleibt für alle x auf $\mathfrak{C}_x$ mit $x_1 \succ x \succ x_0$ und alle u in $\mathfrak{U}$, so ist

$$|\varepsilon(y, u)| \leqq K \cdot \int_{x_0}^{x_1}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(x, y, u)\, dt.$$

Nach Bedingung b) des Satzes 1a in § 6 kann daraufhin endlich $y_1 \succ y'$ auf $\mathfrak{C}_y$ so gewählt werden, daß für alle $y \succ y_1$ auf $\mathfrak{C}_y$ und alle u in $\mathfrak{U}$ stets

$$|\varepsilon(y, u)| < d$$

ist. Für diese y und alle u in $\mathfrak{U}$ liegt dann $g(y, u)$ rechts von h_1, also z^* außerhalb $\mathfrak{K}'(y_1, \mathfrak{U})$.

Mit ebenso geringen Modifikationen gegen § 4, 2 erledigt sich auch der Fall $z^* = \infty$, was den Beweis des erweiterten Kernsatzes vollendet.

Eine fast selbstverständliche, aber in ihren Anwendungen nützliche Bemerkung wollen wir noch in dem folgenden Zusatz formulieren:

Zusatz. *Ist für jedes y auf $\mathfrak{C}_y$ und jedes u in $\mathfrak{U}$ stets*

$$\Phi(y, u) = 1,$$

so liegt auch $g(y, u)$ für jedes solche y und u in dem Bereiche $\mathfrak{K}(x_0, \mathfrak{U})$.

Der Beweis ergibt sich (ohne Benutzung des Kernsatzes) unmittelbar aus Hilfssatz 2a. — Es sei noch hervorgehoben, daß die eben gemachte Voraussetzung „$\Phi(y, u) \equiv 1$“ bei fast allen in I erwähnten speziellen Limitierungsverfahren erfüllt ist.

§ 8.

Beispiele und Anwendungen.

Der größte Teil der Beispiele des § 5 kann auch zur Illustrierung des erweiterten Kernsatzes dienen, sofern man die in Rede stehenden Grenzprozesse noch von einem Parameter u (in $\mathfrak{U}$) abhängen läßt und demgemäß die Kerne jedesmal als solche „für alle u in $\mathfrak{U}$“ bzw. „für alle u in $U \to U_0$“ verstanden werden. Wir führen dies nicht im einzelnen aus, sondern geben die folgenden, ertragreicheren Beispiele:

1. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < 1$ konvergent. Die Variable z, die die Rolle des Parameters u übernimmt, durchlaufe eine bestimmte Punktmenge $\mathfrak{B}$ auf der Peripherie des Einheitskreises, z. B. einen bestimmten Bogen desselben. Dann betrachten wir auf dieser Punktmenge $\mathfrak{B}$ die Folge

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$$

der Abschnitte der Potenzreihe.

Ist nun $\mathfrak{B}_n$ das Bild von $\mathfrak{B}$ bei der Abbildung durch $s_n(z)$, so sei $\mathfrak{K}_{n_1}$ der kleinste konvexe Bereich, der alle $\mathfrak{B}_n$ mit $n \geqq n_1$ enthält, und $\mathfrak{K}$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{K}_{n_1}$. Ist analog $\mathfrak{B}'_y$ bei festem y in $0 < y < 1$ das Bild von $\mathfrak{B}$ bei der Abbildung durch

$$g_y(z) = (1-y) \sum_{n=0}^{\infty} s_n(z)\, y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (yz)^n,$$

so sei $\mathfrak{K}'_{y_1}$ der kleinste konvexe Bereich, der alle $\mathfrak{B}'_y$ mit $1 > y \geqq y_1$ enthält und $\mathfrak{K}'$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{K}'_y$ mit $0 < y < 1$. Dann ist

$$\mathfrak{K}' \leqq \mathfrak{K}.$$

2. Die gleiche Aussage wie in **1.** gilt auch, wenn die $\mathfrak{B}_n$ nicht die Bilder von $\mathfrak{B}$ durch die $s_n(z)$, sondern diejenigen durch

$$t_n(z) = \frac{s_0(z) + s_1(z) + \ldots + s_n(z)}{n+1}$$

oder vermöge der n-ten Glieder irgendeiner C_p- oder H_p-Transformation bedeuten (vgl. § 5, 6). — Nach dem Zusatz des § 7 liegt überdies $g_y(z)$ für jedes y in $0 \leqq y < 1$ und jedes z auf $\mathfrak{B}$ in dem kleinsten konvexen Bereich, der die sämtlichen Werte $s_n(z)$ (oder auch nur die sämtlichen Werte $t_n(z)$ oder $C_p(s_n(z))$) mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ und z auf $\mathfrak{B}$ enthält.

3. Die gleiche Aussage wie in **1.** gilt andrerseits auch, wenn die $\mathfrak{B}_n$ dieselbe Bedeutung haben wie dort, aber die $\mathfrak{B}'_y$ jetzt die Bilder von $\mathfrak{B}$ bei der Abbildung durch irgendeine echte Transformation $g(y, z)$ der $s_n(z)$

bedeuten, z. B. durch deren C_p- oder E_p-Mittel oder durch deren B-Transformation

$$e^{-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n(z)}{n!}y^n, \qquad y>0,$$

bei der nun y wachsend gegen $+\infty$ zu streben hat.

4. Entsprechendes gilt (vgl. § 5, 7), wenn die $\mathfrak{B}_n$ etwa die Bilder von $\mathfrak{B}$ durch das n-te Glied der E_p-Transformation der $s_n(z)$ und die $\mathfrak{B}'_y$, wie eben, diejenigen durch die B-Transformation der $s_n(z)$ bedeuten. — Analoge Aussagen gelten bei Benutzung anderer Transformationen.

5. Es habe jetzt $F(u)$, $f(x,u)$, $t_n(u)$ und $\mathfrak{U}$ dieselbe Bedeutung wie in § 6, Beispiel 2; dann liegt wegen

$$t_n(u)=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,u)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$$

der Kern $\mathfrak{K}'(\mathfrak{U})$ von $t_n(u)$ für $n\to\infty$ und alle u in $\mathfrak{U}$ in dem Kern $\mathfrak{K}(\mathfrak{U})$ von $f(x,u)$ für $x\to+0$ und alle u in $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{K}'(\mathfrak{U})\leqq\mathfrak{K}(\mathfrak{U}).$$

Ist u_0 ein spezieller Punkt der u-Geraden und U eine Umgebung desselben, so ist analog $\mathfrak{K}'(U)\leqq\mathfrak{K}(U)$. Folglich ist auch

$$\mathfrak{K}'_0\leqq\mathfrak{K}_0,$$

wenn $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}'_0$ die Durchschnitte aller $\mathfrak{K}(U)$ bzw. $\mathfrak{K}'(U)$ bedeuten, also die Kerne der eben genannten Grenzprozesse „für alle u in $U\to u_0$“ bezeichnen.

Dies bedeutet offenbar insbesondere, daß die $t_n(u)$ die sogenannte *Gibbssche Erscheinung* nicht mehr aufweisen[2]). Denn hat $F(u)$ an der Stelle u_0 eine Unstetigkeit erster Art, so ist $\mathfrak{K}_0$ die Strecke zwischen den beiden Werten $F(u_0\pm 0)$, die wir uns etwa auf der w-Achse einer reellen uw-Ebene markiert denken, in der die Funktion $w=F(u)$ dargestellt sei. Den Kern $\mathfrak{K}'_0$ können wir uns dann folgendermaßen anschaulich konstruieren: Wir betrachten in derselben uw-Ebene die Kurven

$$w=t_n(u) \quad \text{für} \quad u \text{ in } U \qquad (u=1,2,\ldots)$$

und projizieren sie auf die w-Achse. Ist dann T_n die kleinste Strecke der w-Achse, die diese Projektionen von $t_n(u)$, $t_{n+1}(u)$, ... enthält, so ist $\mathfrak{K}'(U)$ die allen T_n, und $\mathfrak{K}'_0$ wiederum die allen $\mathfrak{K}'(U)$ gemeinsame Strecke.

---

[2]) L. Fejér, Über die Fouriersche Reihe, Math. Annalen 64 (1907), S. 273—288.

Nimmt man statt der C_1-Mittel $t_n(u)$ der Teilsummen diese Teilsummen $s_n(u)$ selbst, so werde man analog zu der Strecke $\mathfrak{K}_0''$ geführt.

Die Gibbssche Erscheinung besagt dann, daß die Strecke $\mathfrak{K}_0''$ über die Strecke $\mathfrak{K}_0$ (und zwar beiderseits bis um etwa $\frac{1}{11}$) hinausragen kann. Da aber $\mathfrak{K}_0'$ in $\mathfrak{K}_0$ liegt, so heißt dies eben, daß die C_1-Mittel $t_n(u)$ diese Gibbssche Erscheinung *nicht* mehr aufweisen.

Unser jetziges Ergebnis ist natürlich von der Voraussetzung, daß es sich um eine Unstetigkeit erster Art in u_0 handelt, ganz unabhängig.

6. Das Ergebnis des letzten Beispiels ist auch in weitem Maße davon unabhängig, daß gerade die von L. Fejér benutzten C_1-Mittel herangezogen werden. Denn erinnert man sich der Entstehung des Fejérschen Integranden $\left(\frac{\sin n x}{\sin x}\right)^2$, so sieht man, daß für jede V-Transformation der $s_n(u)$ gleichfalls die Aussage „$\mathfrak{K}_0' \leqq \mathfrak{K}_0$“ gilt, falls sie bei Anwendung auf die Teilsummen der speziellen Reihe

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots$$

lauter nicht-negative Mittel liefert. Das ist insbesondere bei deren A-Transformation[3])

$$\frac{1}{2} + y\cos x + y^2 \cos 2x + \dots = \frac{1}{2}\,\frac{1-y^2}{1-2y\cos x + y^2}$$

der Fall, da diese letzte Funktion für $0 \leqq y < 1$ und für beliebige x nie negativ ist.

Die A-Mittel $g(y, u)$ der Teilsummen der Fourierreihe von $F(u)$ erhalten so die Darstellung

$$g(y,u) = \frac{1}{2}a_0 + y(a_1\cos u + b_1 \sin u) + y^2(a_2 \cos 2u + b_2 \sin 2u) + \dots$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{F(u+x)+F(u-x)}{2}\,\frac{1-y^2}{1-2y\cos x + y^2}\,dx \qquad (0 \leqq y < 1),$$

aus der nun analoge Schlüsse gezogen werden können, wie in **5.** aus der Darstellung ihrer C_1-Mittel $t_n(u)$. (Vgl. hierzu die Betrachtungen über das Poissonsche Integral in § 11, 9).

7. Noch eine weitere Gruppe Fejérscher Sätze[4]) ist unmittelbar in unserem Kernsatz und dem Zusatz des vorigen Paragraphen enthalten:

---

[3]) In der Theorie der Fourierreihen wird diese Transformation gewöhnlich als *Poissonsche* bezeichnet.

[4]) L. Fejér, Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo **38** (1914), S. 79—97.

Es seien $X(u)$ und $Y(u)$ zwei reelle, mit 2π periodische, beschränkte, integrierbare Funktionen der reellen Veränderlichen u, und

$$z(u) = X(u) + iY(u).$$

Wenn u das Intervall $\mathfrak{U}$ von 0 bis 2π durchläuft, so liefere $z(u)$ die in der z-Ebene gelegene „Kurve“ $\mathfrak{B}$. Addiert man dann die mit i multiplizierte Fourierreihe von $Y(u)$ zu der von $X(u)$, so werde die entstehende Reihe kurz die Fourierreihe von $z(u)$ genannt. Ihre Teilsummen seien $s_n(u)$ und deren C_1-Mittel $t_n(u)$.

Die Kurven, die diese Funktionen liefern, wenn u das Intervall $\mathfrak{U}$ durchläuft, seien als n-te Näherungskurven $\mathfrak{B}_n$ bzw. n-te Mittelkurven $\mathfrak{B}_n'$ bezeichnet. Während sich nun über die Lage der $\mathfrak{B}_n$ zu $\mathfrak{B}$ nicht viel aussagen läßt, ist die der $\mathfrak{B}_n'$ in sehr einfacher Weise durch $\mathfrak{B}$ bedingt. Wir setzen dazu, ähnlich wie bisher

$$f(x, u) = \frac{1}{2}[z(u + 2x) + z(u - 2x)],$$

so daß wieder

$$(*) \qquad t_n(u) = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, u)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$$

ist und also durch eine echte Mittelbildung aus $f(x, u)$ gewonnen wird. Daher ist der Kern $\mathfrak{K}'(\mathfrak{U})$ des Grenzprozesses $t_n(u)$ für $n \to \infty$ und alle u in $\mathfrak{U}$ in dem Kern $\mathfrak{K}(\mathfrak{U})$ des Grenzprozesses $f(x, u)$ für $x \to +0$ und alle u in $\mathfrak{U}$ enthalten. Die geometrische Deutung dieser Aussage liegt auf der Hand. Sie wird aber noch einfacher, wenn wir berücksichtigen, daß die benutzte Mittelbildung sogar den Voraussetzungen des Zusatzes in § 7 genügt. Danach liegt $t_n(u)$ für jedes n und jedes u in $\mathfrak{U}$, — liegen also *alle* $\mathfrak{B}_n'$ in dem kleinsten konvexen Bereich, der alle Werte $f(x, u)$ enthält. Jeder Wert $f(x, u)$ ist aber der Mittelpunkt einer Sehne von $\mathfrak{B}$ und liegt daher sicher in dem keinsten konvexen Bereich, der die Kurve $\mathfrak{B}$ enthält. Wir haben daher ganz speziell den folgenden Fejérschen Satz: *Die n-ten Mittelkurven liegen sämtlich in dem kleinsten konvexen Bereich, der die Kurve $\mathfrak{B}$ enthält.*

8. Genau dieselben Betrachtungen gelten, wenn wir statt der C_1-Mittel $t_n(u)$, ähnlich wie in 6., die A-Mittel

$$g(y, u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{z(u+x)+z(u-x)}{2} \cdot \frac{1-y^2}{1-2y\cos x+y^2}\, dx$$

der Teilsummen der Fourierreihe von $z(u)$ benutzen. Auch die durch $g(y, u)$ bei festem positivem $y < 1$ erhaltenen Kurven können als „Mittel-

kurven" $\mathfrak{B}_y''$ bezeichnet werden; sie entsprechen eben den A-Mitteln und nicht mehr den C_1-Mitteln. Und da der Übergang zu $g(y, u)$ wieder durch eine echte Mittelbildung geschieht, die überdies auch den Voraussetzungen des Zusatzes in § 7 genügt, so gelten auch für diese Mittelkurven $\mathfrak{B}_y''$ dieselben Aussagen, wie die in **7.** für die $\mathfrak{B}_n'$ gemachten.

9. Aus seinem in **7.** gewonnenen Ergebnis zieht L. Fejér a. a. O. eine etwas andere Folgerung, die daher ebenfalls als Spezialfall in unserm Kernsatz und dem Zusatz enthalten ist. Wir wollen sie, als interessantes Gegenstück zu dem in **1.** und **2.** Festgestellten, hier noch anfügen:

Die Potenzreihe $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei für $|z| < 1$ konvergent. Ist dann K das Bild des Kreises $|z| = r$ mit $0 < r < 1$ bei der Abbildung durch $F(z)$ und sind K_n bzw. K_n' seine Bilder bei der Abbildung durch die Teilsummen $s_n(z)$ der Potenzreihe bzw. durch deren C_1-Mittel $t_n(z)$, so liegen die K_n' sämtlich in dem kleinsten konvexen Bereich, der K enthält, während die K_n dort nicht zu liegen brauchen.

10. In ähnlicher Richtung hatte A. Hurwitz[5]) folgendes bewiesen: Ist σ die Schwankung von $F(u)$ [6]) in einem Intervall U und $\varepsilon > 0$ beliebig, so ist für alle u eines ganz innerhalb U gelegenen, abgeschlossenen Teilintervalles U_0 von U und alle hinreichend großen n

$$|t_n(u) - F(u)| < \sigma + \varepsilon.$$

Auch dieser Satz ist, wie man sieht, unmittelbar als Spezialfall in unserm allgemeinen Satz enthalten. Denn es ist

$$t_n(u) - F(u) = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x, u) - F(u)] \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx;$$

und da hier die linke Seite wieder eine echte Transformation von $f(x, u) - F(u)$ darstellt, so liegt der Kern $\mathfrak{K}_0'$ von

$$t_n(u) - F(u) \quad \text{für} \quad n \to \infty \text{ und alle } u \text{ in } U \to U_0$$

in dem Kern von

$$f(x, u) - F(u) \quad \text{für} \quad x \to +0 \text{ und alle } u \text{ in } U \to U_0.$$

Darin ist aber das Hurwitzsche Ergebnis enthalten.

11. Den eben behandelten Hurwitzschen Satz hat L. Fejér [7]) wiederum auf die von ihm definierten Mittelkurven (s. **7.**) übertragen und so den

---

[5]) A. Hurwitz, Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, Math. Annalen **57** (1903), S. 425—446, bes. S. 433.

[6]) Die Bezeichnungen sind dieselben wie in **5.**

[7]) Vgl. die in Fußnote [4]) genannte Arbeit, Theorem II (S. 87).

folgenden Satz erhalten: Es seien $\mathfrak{C}_0$ bzw. $\mathfrak{C}$ diejenigen Bögen der in **7.** definierten Kurve $\mathfrak{B}$, die erhalten werden, wenn u in einem bestimmten Intervall U_0 bzw. einer Umgebung U von U_0 liegt. Es sei Γ der kleinste konvexe Bereich, der $\mathfrak{C}$ enthält, und Γ^* ein abgeschlossener Bereich, der Γ in seinem Innern enthält. Dann liegen die dem Intervall U_0 entsprechenden Bögen der Mittelkurven $t_n(u)$ von einem gewissen Index ab alle in Γ^*.

Auch dieser Satz ist eine unmittelbare Folge unseres Kernsatzes; denn aus der Darstellung (*) in **7.** folgt wieder, daß der Kern des Grenzprozesses

$$t_n(u) \quad \text{für} \quad n \to \infty \text{ und alle } u \text{ in } U \to U_0$$

in dem Kern des Grenzprozesses

$$f(x, u) \quad \text{für} \quad x \to +0 \text{ und alle } u \text{ in } U \to U_0$$

enthalten. Das ist aber ein noch etwas über die Fejérsche Aussage hinaus gehendes Resultat. — Bei Benutzung der A-Mittel an Stelle der C_1-Mittel lassen sich natürlich ganz analoge Sätze aussprechen.

IV. Teil.

Grenzprozesse in mehrdimensionalen Räumen.

§ 9.

Annäherung längs Kurven in mehrdimensionalen Räumen.

Unsere Kurven $\mathfrak{C}_x$ und $\mathfrak{C}_y$ lagen bisher in der komplexen Ebene, d. h. im 2- bzw. 1-dimensionalen Raum. Für eine Annäherung längs Kurven in mehrdimensionalen Räumen gelten natürlich die analogen Betrachtungen und Sätze. Wir deuten dies nur kurz an:

Ist $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ein Punkt des p-dimensionalen euklidischen Raumes, so ist $\mathfrak{C}_x$ jetzt — unter sonst analogen Voraussetzungen — durch die Parameterdarstellung

$$(\mathfrak{C}_x) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t) \qquad (0 \leqq t < \tau_x)$$

gegeben zu denken. $\mathfrak{x}(0) = \mathfrak{x}_0$ sei der Anfangspunkt und für wachsende $t \to \tau_x$ soll sich jede der Koordinaten x_i von $\mathfrak{x}$ einem bestimmten endlichen oder unendlichen Grenzwert $\bar{x}_i$ nähern. Wir wollen dies kurz durch $\mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}}$ ausdrücken, so daß $\bar{\mathfrak{x}}$ als der (nicht zu $\mathfrak{C}_x$ gehörige) „Endpunkt“ von $\mathfrak{C}_x$ anzusehen ist. Auf $\mathfrak{C}_x$ sei nun die Funktion $f(\mathfrak{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ definiert und es handle sich um den Grenzprozeß

$$(\mathrm{f}) \qquad f(\mathfrak{x}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}} \quad \text{längs} \quad \mathfrak{C}_x.$$

Die Werte von $f(\mathfrak{x})$ können dabei reell oder komplex sein oder sie können auch selbst durch Punkte eines mehrdimensionalen Raumes dargestellt

gedacht werden. Doch sollen sie wieder, wenn t_1 in $0 < t_1 < \tau_x$ liegt, für $0 \leqq t \leqq t_1$ beschränkt sein.

Ebenso sei nun weiter in einem q-dimensionalen Raume der Punkte $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_q)$ die Kurve $\mathfrak{C}_y$

$$(\mathfrak{C}_y) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(t) \qquad (0 \leqq t < \tau_y)$$

mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{y}_0$ und dem „Endpunkt“ $\mathfrak{y}$ gegeben. Endlich wird eine *reelle* Funktion $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ gewählt, die für jedes $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{C}_x$ und jedes $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{C}_y$ definiert ist und für die

$$\int_{\mathfrak{x}_0}^{\bar{\mathfrak{x}}\,(\mathfrak{C}_x)} \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, f(\mathfrak{x})\, dt = g(\mathfrak{y})$$

für jedes $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{C}_y$ existiert. An Stelle von (f) wird dann der Grenzprozeß

$$(g) \qquad g(\mathfrak{y}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}} \quad \text{längs} \quad \mathfrak{C}_y$$

untersucht. Liegen die Werte von $f(\mathfrak{x})$ in einem r-dimensionalen Raume, so ist in dem obigen Integral lediglich eine formale Zusammenfassung der r über die einzelnen Koordinaten von f erstreckten Integrale zu sehen. Die Werte von $g(\mathfrak{y})$ sind daher ebenfalls Punkte eines r-dimensionalen Raumes.

Führt nun der Grenzprozeß (g) im Sinne gewöhnlicher Konvergenz zu einem Grenzwert a, so sagen wir wieder, $f(\mathfrak{x})$ sei *durch das beschriebene V-Verfahren limitierbar zum Werte a*. Aber auch, wenn dies nicht der Fall ist, läßt sich analog wie in § 4, 1 der Kern $\mathfrak{K}$ des Grenzprozesses (f) und der Kern $\mathfrak{K}'$ des Grenzprozesses (g) definieren. Das hierzu erforderliche Rüstzeug aus der Theorie der konvexen Punktmengen mehrdimensionaler Räume findet man lückenlos in Abschnitt III der grundlegenden Arbeit von E. Steinitz, „Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme“ [8]). Für diese Kerne gilt dann wieder der folgende

Kernsatz. *Die Funktion $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ sei reell und nicht-negativ und erfülle die beiden folgenden Voraussetzungen:*

---

[8]) E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **143** (1913), S. 128—175. — In geringfügiger Modifikation gegen die dort getroffenen Festsetzungen schließen wir den r-dimensionalen Raum, in dem die Funktionswerte von f bzw. g dargestellt gedacht werden, durch Einführung genau *eines* Punktes ∞ ab und denken uns auch alle auftretenden konvexen Bereiche abgeschlossen. Die Definition des kleinsten konvexen Bereiches $\mathfrak{K}$, der eine gegebene Punktmenge $\mathfrak{M}$ (in der dieser Punkt ∞ nicht selbst als Element auftritt) enthält, lautet dann wieder so: Gibt es keinen Halbraum, der $\mathfrak{M}$ enthält, so ist $\mathfrak{K}$ der ganze Raum einschließlich ∞. Andernfalls ist $\mathfrak{K}$ der Durchschnitt aller Halbräume, die $\mathfrak{M}$ enthalten (s. Steinitz, a. a. O. S. 157). Doch ist, falls $\mathfrak{M}$ beschränkt ist, der in diesem Durchschnitt isoliert auftretende Punkt ∞ wegzulassen.

a) *Für jedes* $\mathfrak{y}$ *auf* $\mathfrak{C}_y$ *existiert*

$$\int_{\mathfrak{x}_0}^{\bar{\mathfrak{x}}} {}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dt = \Phi(\mathfrak{y})$$

und es strebt $\Phi(\mathfrak{y}) \to 1$ *für* $\mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}}$ *längs* $\mathfrak{C}_y$.

b) *Für je zwei feste Punkte* $\mathfrak{x}_1$ *und* $\mathfrak{x}_2$ *auf* $\mathfrak{C}_x$ *und für jedes* $\mathfrak{y}$ *auf* $\mathfrak{C}_y$ *existiert*

$$\int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} {}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dt$$

und strebt $\to 0$ *für* $\mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}}$ *längs* $\mathfrak{C}_y$[9]).

Dann ist

$$\mathfrak{K}' \leqq \mathfrak{K}.$$

Da es sich bei diesem Satze, genau wie bei allen bisherigen, um einen eindimensionalen Grenzprozeß handelt, nur daß das eindimensionale Gebilde, längs dessen sich die Variable bewegt, in einem Raum höherer Dimension liegt und daß auch die Funktionswerte von f und g in solchen Räumen liegen können, so besteht kein tieferer Unterschied gegen die Betrachtungen des § 4 und wir können die Beweise überspringen. Ebenso liegt es bei der den Betrachtungen von § 6 und § 7 entsprechenden Erweiterung, bei der also die Funktionen f und φ und demgemäß auch g noch von einem Parameter $\mathfrak{u}$ abhängen, der die Punkte einer Menge $\mathfrak{U}$ eines $\mathfrak{u}$-Raumes durchläuft. Wir unterdrücken die Formulierung der Sätze und die Ausführung ihrer Beweise. Einige Beispiele bringt der übernächste Paragraph.

§ 10.

Annäherung auf Punktmengen.

Tiefergehend werden die Unterschiede, wenn sich $\mathfrak{x}$ nicht auf einer Kurve $\mathfrak{C}_x$, sondern auf allgemeineren Punktmengen bewegt. Um uns nicht in zunächst unnötige Komplikationen zu verstricken, beschränken wir uns auf die folgende relativ einfache und doch hinreichend allgemeine Situation.

Im p-dimensionalen Raume der $\mathfrak{x}$ sei uns ein π-dimensionales, stetiges Flächenstück $\mathfrak{F}_x$ $(1 \leqq \pi \leqq p)$ durch die Parameterdarstellung

$$(\mathfrak{F}_x) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t_1, t_2, \ldots, t_\pi)$$

gegeben[10]), bei der jedes t_i ein bestimmtes, offenes oder abgeschlossenes Intervall T_i mit eventueller Ausnahme je eines speziellen, im Innern oder

[9]) Wir nennen das Verfahren unter diesen Voraussetzungen wieder ein *echtes Limitierungsverfahren* bzw. eine *echte Transformation* oder *Mittelbildung*.

[10]) Bei den Anwendungen wird sehr oft $\pi = p$ und $x_i = t_i$ sein können.

am Rande von T_i gelegenen Wertes τ_i durchläuft. Sind $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\pi$ positive, hinreichend kleine Zahlen, so soll der Teil $\mathfrak{F}_x'$ von $\mathfrak{F}_x$, den man erhält, wenn die t_i in T_i noch der Beschränkung

$$|t_i - \tau_i| \geqq \delta_i \quad \left(\text{bzw.} \left|\frac{1}{t_i}\right| \geqq \delta_i, \quad \text{falls} \quad \tau_i = \pm\infty\right)$$

unterworfen werden, einen positiven π-dimensionalen Inhalt haben. Wenn endlich (simultan) die $t_i \to \tau_i$ streben, so soll jede Koordinate von $\mathfrak{x}$ einen bestimmten, endlichen oder unendlichen Grenzwert haben, was wir wieder kurz durch $\mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}}$ ausdrücken wollen.

Auf $\mathfrak{F}_x$ sei nun eine Funktion $f(\mathfrak{x})$ gegeben, deren Werte einem bestimmten, etwa r-dimensionalen Raume angehören. Es genügt nun für das Folgende im allgemeinen nicht, wenn $f(\mathfrak{x})$ auf jedem Teil $\mathfrak{F}_x'$ von $\mathfrak{F}_x$, wie er eben beschrieben wurde, als beschränkt vorausgesetzt wird; vielmehr muß $f(\mathfrak{x})$ schlechtweg als beschränkt angenommen [11]) oder ähnlichen Einschränkungen unterworfen werden. Wir wollen so vorgehen:

Sind die δ_i wieder feste, positive, hinreichend kleine Zahlen, so wollen wir den Teil von $\mathfrak{F}_x$, den man erhält, wenn die t_i in T_i der Beschränkung

$$|t_i - \tau_i| \leqq \delta_i \quad \left(\text{bzw.} \left|\frac{1}{t_i}\right| \leqq \delta_i, \text{ falls } \tau_i = \pm\infty\right)$$

unterworfen werden, kurz eine δ-Umgebung $\mathfrak{f}_x$ von $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{F}_x$ nennen [12]). Wir stellen dann die folgende

Forderung B. *Auf jeder Teilmenge der Form* $\mathfrak{F}_x - \mathfrak{f}_x$ *von* $\mathfrak{F}_x$ *soll* $f(\mathfrak{x})$ *beschränkt sein* [13]).

Unter diesen Voraussetzungen handle es sich um den (π-dimensionalen) Grenzprozeß

$$(\mathrm{f}) \qquad f(\mathfrak{x}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{F}_x.$$

Analog sei nun im $\mathfrak{y}$-Raume das ϱ-dimensionale, stetige Flächenstück $\mathfrak{F}_y$ $(1 \leqq \varrho \leqq q)$ durch die Parameterdarstellung

$$(\mathfrak{F}_y) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}\,(t_1, t_2, \ldots, t_\varrho)$$

gegeben, bei der jetzt jedes t_i ein bestimmtes Intervall S_i mit eventueller Ausnahme je eines speziellen, im Innern oder am Rande von S_i gelegenen Wertes σ_i durchläuft. Jeder (analog wie bei $\mathfrak{F}_x$ zu definierende) Teil $\mathfrak{F}_y'$

---

[11]) Diese Voraussetzung wird von Bromwich und Hardy in ihrer weiter unten in Fußn. [20]) genannten Arbeit als *condition of finitude* eingeführt, um u. a. den Abelschen Grenzwertsatz auf Doppelreihen zu übertragen.

[12]) Es ist zu beachten, daß bei $\pi > 1$ der vorhin beschriebene Teil $\mathfrak{F}_x'$ und die jetzt definierte Umgebung $\mathfrak{f}_x$ zusammen noch *nicht* das ganze Flächenstück $\mathfrak{F}_x$ ausmachen.

[13]) Die Schranke darf von der Wahl der δ_i abhängig sein.

von $\mathfrak{F}_y$ soll einen positiven ϱ-dimensionalen Inhalt haben und, wenn die t_i simultan gegen die σ_i streben, soll (in analoger Bedeutung wie bei $\mathfrak{x}$) $\mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}}$ streben.

Schließlich sei eine *reelle* Funktion $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ gewählt, die für jedes $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{F}_x$ und jedes $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{F}_y$ definiert ist und für die

$$^{(\mathfrak{F}_x)}\int \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, f(\mathfrak{x})\, dt = g(\mathfrak{y})$$

für jedes feste $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{F}_y$ existiert[14]). Untersuchen wir nun an Stelle von f den Grenzprozeß

$$(g) \qquad g(\mathfrak{y}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{F}_y,$$

so sehen wir darin wieder ein Limitierungsverfahren. Es führt einen π-dimensionalen Grenzprozeß in einen ϱ-dimensionalen über. Liefert der Grenzprozeß (g) im Sinne gewöhnlicher Konvergenz einen Grenzwert a, so sagen wir wieder, $f(\mathfrak{x})$ sei V-limitierbar zum Werte a für $\mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}}$ auf $\mathfrak{F}_x$, in Zeichen:

$$V\text{-}\lim_{\mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}}} f(\mathfrak{x}) = a.$$

In Analogie zu Satz 1 in § 1 gilt dann zunächst der folgende

Satz 1b. *Erfüllt $f(\mathfrak{x})$ die Forderung B, so folgt aus $\lim f(\mathfrak{x}) = a$, daß auch $V\text{-}\lim f(\mathfrak{x}) = a$ ist für $\mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}}$ auf $\mathfrak{F}_x$, falls die reelle Funktion $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ den folgenden drei Bedingungen genügt:*

a) *Für jedes $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{F}_y$ existiert*

$$^{(\mathfrak{F}_x)}\int \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, dt = \Phi(\mathfrak{y})$$

und es strebt $\Phi(\mathfrak{y}) \to 1$ für $\mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}}$ auf $\mathfrak{F}_y$.

b) *Für jede fest gewählte Umgebung $\mathfrak{f}_x$ von $\bar{\mathfrak{x}}$ auf $\mathfrak{F}_x$ existiert*

$$^{(\mathfrak{F}_x - \mathfrak{f}_x)}\int |\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|\, dt$$

und strebt $\to 0$ für $\mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}}$ auf $\mathfrak{F}_y$.

c) *Es gibt eine positive Konstante M, so daß für jede Umgebung $\mathfrak{f}_x$ von $\bar{\mathfrak{x}}$ auf $\mathfrak{F}_x$*

$$^{(\mathfrak{F}_x \quad \mathfrak{f}_x)}\int |\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|\, dt < M$$

ausfällt.

---

[14]) Dies Integral ist als (uneigentliches) π-faches Integral über den Bereich

$$t_i \neq \tau_i \quad \text{in} \quad T_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \pi),$$

der Variablen t_i zu verstehen, nachdem für die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ die Funktionen $x_i(t_1, t_2, \ldots, t_\pi)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, und für dt das Element $dt_1\, dt_2 \ldots dt_\pi$ gesetzt worden sind. — Es ist vielleicht nicht überflüssig, ausdrücklich zu betonen, daß das obige Integral und mit ihm also jedes V-Verfahren von der gewählten Parameterdarstellung abhängt (vgl. I, Fußnote 1).

Der Beweis verläuft bei den jetzigen Voraussetzungen wörtlich wie bei Satz 1 in § 1. —

Genau wie das in I behandelte V-Verfahren fast alle speziellen Limitierungsverfahren der (gewöhnlichen) Theorie der divergenten Reihen und darüber hinaus viele andere Transformationen von einfachen Zahlenfolgen oder Funktionen einer Veränderlichen enthielt, so sind in dem jetzt beschriebenen Verfahren fast alle speziellen Limitierungsverfahren der Theorie der *mehrfachen*, divergenten Reihen und darüber hinaus viele andere Transformationen von *mehrfachen* Zahlenfolgen (oder Reihen) und von Funktionen *mehrerer* Veränderlicher enthalten. Unter den genauer untersuchten Verfahren dieser Art heben wir das *Cesàrosche, Höldersche und Abelsche Verfahren* hervor und unter den weiteren Transformationen *die Fourierschen Doppelreihen, das Poissonsche Integral, die Laplacesche Reihe* u. v. a. m. Der Raum verbietet es, dies im einzelnen auszuführen; einige Beispiele wird der nächste Paragraph bringen.

Für die Grenzprozesse (f) und (g) definieren wir nun wieder die Kerne $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$: Es sei $\mathfrak{K}(\mathfrak{f}_x)$ der kleinste konvexe Bereich (des Raumes, in dem die Funktionswerte $f(\mathfrak{x})$ veranschaulicht gedacht werden), der alle Werte $f(\mathfrak{x})$ enthält, für die $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{f}_x$ liegt. Dann bezeichnen wir den Durchschnitt aller $\mathfrak{K}(\mathfrak{f}_x)$ als *den Kern* $\mathfrak{K}$ *des Grenzprozesses* (f).[15]) Ganz analog ist *der Kern des Grenzprozesses* (g) zu definieren. Für diese gilt dann wieder der Satz, *daß stets*

$$\mathfrak{K}' \leqq \mathfrak{K}$$

ist, falls $f(\mathfrak{x})$ *die Forderung B erfüllt, falls* $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *nicht-negativ ist und den Bedingungen* a) *und* b) *des Satzes* 1b *genügt.*

Endlich der letzte Schritt! Hängen $f(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ und $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u})$ und demgemäß auch $g(\mathfrak{y}) = g(\mathfrak{y}, \mathfrak{u})$ noch von einem Parameter $\mathfrak{u}$ ab, der auf einer Menge $\mathfrak{U}$ eines (ebenfalls mehrdimensionalen) u-Raumes variabel ist, so können wir zunächst einen den Sätzen 1, 1a und 1b entsprechenden

---

[15]) Will man hier, wie in den vorangehenden Fällen, $\mathfrak{K}$ als Limes ineinanderliegender Bereiche erhalten, so kann man so vorgehen: Die bei positivem (kleinem) δ durch

$$|t_i - \tau_i| \leqq \delta \quad \left(\text{bzw. } \left|\frac{1}{t_i}\right| \leqq \delta, \quad \text{falls} \quad \tau_i = \pm\infty\right)$$

definierte Umgebung von $\bar{\mathfrak{x}}$ werde mit $\mathfrak{f}_\delta$ und der kleinste konvexe Bereich, der die Werte $f(\mathfrak{x})$ mit $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{f}_\delta$ enthält, werde mit $\mathfrak{K}(\delta)$ bezeichnet. Dann nimmt $\mathfrak{K}(\delta)$ zugleich mit δ ab und $\mathfrak{K}$ ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{K}(\delta)$ mit hinreichend kleinem $\delta > 0$. (Vgl. den eingeklammerten Absatz in § 4, 1.) — Besteht der Kern eines Grenzprozesses aus genau einem im Endlichen gelegenen Punkt, so handelt es sich wieder um gewöhnliche *Konvergenz*. Besteht er genau aus dem einen Punkt ∞, so sprechen wir auch hier von *bestimmter Divergenz*.

Satz formulieren und beweisen. Wir können weiter — die Einzelheiten auszuführen erübrigt sich wohl — wie in § 7 die Kerne $\mathfrak{K}(\mathfrak{U})$ und $\mathfrak{K}_0$ für die Grenzprozesse

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{u}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{F}_x \quad \text{und alle} \quad \mathfrak{u} \text{ in } \mathfrak{U}$$

und

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{u}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{F}_x \quad \text{und alle} \quad \mathfrak{u} \text{ in } U \to U_0$$

definieren, nebst den entsprechenden Bereichen für $g(\mathfrak{y}, \mathfrak{u})$, und können dann schließlich den folgenden, alle bisherigen Kernsätze (insbesondere den soeben ausgesprochenen) umfassenden Satz formulieren:

Allgemeiner Kernsatz für echte Limitierungsverfahren: *Es erfülle* $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ *die Forderung B gleichmäßig für alle* $\mathfrak{u}$ *in* $\mathfrak{U}$. *Die reelle Funktion* $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u})$ *sei nicht-negativ und genüge den beiden folgenden Bedingungen*

a) *Es existiert für jedes* $\mathfrak{y}$ *auf* $\mathfrak{F}_y$ *und jedes* $\mathfrak{u}$ *auf* $\mathfrak{U}$ *das Integral*

$$^{(\mathfrak{F}_x)}\int \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u})\, dt = \Phi(\mathfrak{y}, \mathfrak{u})$$

und es strebt $\Phi(\mathfrak{y}, \mathfrak{u})$ *für* $\mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}}$ *auf* $\mathfrak{F}_y$ *gleichmäßig für alle* $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{U}$ *gegen* 1.

b) *Für jede fest gewählte Umgebung* $\mathfrak{f}_x$ *von* $\bar{\mathfrak{x}}$, *jedes* $\mathfrak{y}$ *auf* $\mathfrak{F}_y$ *und jedes* $\mathfrak{u}$ *in* $\mathfrak{U}$ *existiert*

$$^{(\mathfrak{F}_x - \mathfrak{f}_x)}\int \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u})\, dt$$

und strebt für $\mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}}$ *auf* $\mathfrak{F}_y$ *gleichmäßig für alle* $\mathfrak{u}$ *in* $\mathfrak{U}$ *gegen* 0.

Dann ist stets

$$\mathfrak{K}'(\mathfrak{U}) \leqq \mathfrak{K}(\mathfrak{U}) \quad \textit{und} \quad \mathfrak{K}_0' \leqq \mathfrak{K}_0.$$

Der Beweis verläuft wörtlich so wie der in § 4 und § 7 ausgeführte; denn alle Voraussetzungen sind gerade so gefaßt, daß die dortigen Schlüsse mutatis mutandis auch bei den jetzigen mehrdimensionalen Variablen ohne jede prinzipielle Änderung gültig bleiben. Bezüglich der Analoga zu den Hilfssätzen 1 und 2 (bzw. 1a und 2a) sei dabei nochmals auf die in § 9, Fußnote [8]), genannte Abhandlung von E. Steinitz, insbesondere auf die Abschnitte II und III verwiesen.

Daß auch hier, wie in § 7, der folgende Zusatz gilt, bedarf keiner besonderen Begründung:

Zusatz. *Ist für jedes* $\mathfrak{y}$ *auf* $\mathfrak{F}_y$ *und jedes* $\mathfrak{u}$ *in* $\mathfrak{U}$

$$\Phi(\mathfrak{y}, \mathfrak{u}) = 1,$$

so liegt auch $g(\mathfrak{y}, \mathfrak{u})$ *für jedes solche* $\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{u}$ *in dem Bereiche* $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{U})$.[16])

[16]) D. h. also in dem kleinsten konvexen Bereiche, der alle Punkte $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ mit $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{F}_x$ und $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{U}$ enthält.

§ 11.

Beispiele und Anwendungen[17]).

1. Als einfachstes Beispiel mehrdimensionaler Grenzprozesse betrachten wir die Limitierung von Doppelfolgen s_{mn}. Hier ist als $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Raum je eine zweidimensionale Ebene, als $\mathfrak{F}_x$ und $\mathfrak{F}_y$ je deren erster Quadrant, für $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ beidemal $(+\infty, +\infty)$ zu wählen und

$$f(\mathfrak{x}) = f(x_1, x_2) = s_{mn} \quad \text{für} \quad \begin{cases} m \leqq x_1 < m+1, & m = 0, 1, \ldots \\ n \leqq x_2 < n+1, & n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

zu setzen. Die s_{mn} dürfen dabei selbst Punkte eines mehrdimensionalen Raumes sein. Wählt man nun bezüglich der x_i ebenso treppenförmig

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \varphi(x_1, x_2; y_1, y_2) = \varphi_{mn}(y_1, y_2),$$

so würde der Übergang von s_{mn} zu

$$g(y_1, y_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} \varphi_{mn}(y_1, y_2)$$

ein Limitierungsverfahren liefern, das dem Perronschen Typus (s. § 2, 1) entspricht. Wählt man φ auch noch bezüglich der y_i in derselben Weise treppenförmig und setzt etwa

$$\varphi_{\mu\nu}(y_1, y_2) = a_{\mu\nu}^{(mn)},$$

so liefert der Übergang von s_{mn} zu

$$t_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}^{(mn)} s_{\mu\nu}$$

ein Limitierungsverfahren für Doppelfolgen, das dem Toeplitzschen Typus (s. § 2, 2) entspricht.

Es macht nun keinerlei Schwierigkeiten, die Bedingungen anzugeben, unter denen diese Verfahren *echt* sind.

Setzt man speziell

$$a_{\mu\nu}^{(mn)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(m+1)(n+1)}, & \text{falls} \quad \mu \leqq m \quad \textit{und} \quad \nu \leqq n, \\ 0, & \text{falls} \quad \mu > m \quad \textit{oder} \quad \nu > n, \end{cases}$$

so wird

$$t_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} s_{\mu\nu}$$

---

[17]) Bei den Beispielen und Anwendungen dieses Paragraphen wollen wir Satz 1 und seine Erweiterungen 1a und 1b kurz als die *Permanenzsätze* der betreffenden Limitierungsverfahren bezeichnen. Sie sind (bei $\varphi \geqq 0$) natürlich auch Spezialfälle der zugehörigen Kernsätze, die in sie übergehen, wenn die betreffenden Kerne sich auf einen Punkt reduzieren. Insbesondere werden so (bei $\varphi \geqq 0$) die Permanenzsätze auch auf den Fall bestimmter Divergenz ausgedehnt. (Vgl. § 5, 3.)

und das hierdurch definierte H_1- *oder* C_1-*Verfahren für Doppelfolgen* ist gewiß ein echtes. Für dieses ergibt sich daher sofort:

a) Genügt s_{mn} der Forderung B,[18]) so folgt aus $s_{mn} \to s$ stets $t_{mn} \to s$, beides im Pringsheimschen Sinne verstanden, wonach m und n simultan, aber unabhängig voneinander über alle Grenzen wachsen.

b) Sind die s_{mn} reell und genügen sie der Forderung B, so ist

$$\underline{\lim}\, s_{mn} \leqq \underline{\lim}\, t_{mn} \leqq \overline{\lim}\, s_{mn}.$$

c) Genügen die s_{mn} der Forderung B, sind aber sonst beliebig (d. h. Punkte eines beliebigen mehrdimensionalen Raumes), so liegt der Kern der t_{mn} im Kern der s_{mn}.[19]) — Die letzte Aussage, die offenbar a) und b) als Spezialfall umfaßt, enthält, wie man sieht, insbesondere noch die Erweiterung von a) auf den Fall bestimmter Divergenz, in welchem der Kern der Doppelfolge nur aus dem einen Punkt ∞ besteht.

2. Die oben gemachten Aussagen a), b) und c) gelten natürlich auch für jedes andere *echte* Verfahren vom Toeplitzschen Typus. Wir erwähnen von diesen nur noch das C_k-Verfahren, bei dem die s_{mn} durch

$$t_{mn} = \frac{1}{\binom{m+k}{m}\binom{n+k}{n}} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \binom{m+k-1-\mu}{m-\mu}\binom{n+k-1-\nu}{n-\nu} s_{\mu\nu}$$

ersetzt werden.

3. Sie gelten auch für jedes echte Verfahren vom Perronschen Typus. Zu diesen gehört insbesondere das A-Verfahren, bei dem aus der Folge s_{mn} die Funktion zweier Veränderlicher

$$g(y_1, y_2) = (1-y_1)(1-y_2) \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn}\, y_1^m\, y_2^n$$

gebildet wird, — eine Potenzreihe, deren Konvergenz für nicht-negative $y_1 < 1$ und $y_2 < 1$ vorauszusetzen ist, und die für reelle, wachsende $(y_1, y_2) \to (1, 1)$ zu betrachten ist. Die Aussage a) in **1.** liefert dann insbesondere den *Abelschen Grenzwertsatz* für Doppelreihen (allerdings zunächst in seiner einfachsten Form, da die y_i reell gedacht sind)[20]).

---

[18]) Das bedeutet also: Bei festem m, n soll es eine Konstante $K = K(m, n)$ geben, so daß $|s_{\mu\nu}| < K$ ist, wofern $\mu \leqq m$ *oder* $\nu \leqq n$ ist.

[19]) Was hier kurz als *Kern einer Doppelfolge* s_{mn} bezeichnet wird, ist ja klar, — nämlich der Durchschnitt aller $\mathfrak{K}_{mn}$, wenn $\mathfrak{K}_{mn}$ den kleinsten konvexen Bereich (des Raumes der s_{mn}) bezeichnet, der alle Punkte $s_{\mu\nu}$ mit $\mu \geqq m$ *und* $\nu \geqq n$ enthält.

[20]) Die Übertragung des Abelschen Grenzwertsatzes auf mehrfache Reihen findet sich wohl zum ersten Male bei T. J. I'A. Bromwich and G. H. Hardy, Some extensions to multiple series of Abel's theorem on the continuity of power series, Proc. London Math. Soc. (2) **2** (1904), S. 161—189.

4. Sind die t_{mn} die in **2.** definierten C_k-Mittel der s_{mn}, so ist die in **3.** definierte Funktion $g(y_1, y_2)$ auch durch

$$g(y_1, y_2) = (1-y_1)^{k+1}(1-y_2)^{k+1} \sum_{m,n=0}^{\infty} t_{mn} \binom{m+k}{m} \binom{n+k}{n} y_1^m y_2^n$$

gegeben (vgl. § 5, 6). Es geht demnach $g(y_1, y_2)$ auch aus den t_{mn} durch eine echte Transformation hervor, was die folgenden Sätze liefert:

a) Ist s_{mn} C_k-limitierbar zum Werte s, erfüllen die C_k-Mittel t_{mn} aus den s_{mn} die Forderung B und ist die Potenzreihe für $g(y_1, y_2)$ für positive $y_1 < 1$, $y_2 < 1$ konvergent, so strebt auch

$$g(y_1, y_2) \to s \quad \text{für wachsende } (y_1, y_2) \to (1, 1).$$

b) Existiert der C_k-Limes der s_{mn} nicht, so liegt — unter sonst gleichen Voraussetzungen — doch der A-Kern der Folge s_{mn}, d. h. der Kern des Grenzprozesses

$$g(y_1, y_2) \quad \text{für} \quad (y_1, y_2) \to (1, 1) \quad \text{längs} \quad \begin{cases} 0 \leqq y_1 < 1, \\ 0 \leqq y_2 < 1, \end{cases}$$

in dem C_k-Kern dieser Folge, d. h. also in dem Kern des Grenzprozesses

$$t_{mn} \quad \text{für} \quad (m, n) \to (+\infty, +\infty) \quad \text{längs} \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ebenso liegen die Dinge, wenn man von den C_k-Mitteln nicht zu den A-Mitteln, sondern zu den C_l-Mitteln mit den $l > k$ übergeht.

5. Haben wir es mit einer p-fachen Folge $s_{n_1, n_2, \ldots, n_p}$ zu tun, so ergeben sich genau ebenso einfach die analogen Sätze über ihre C_k- bzw. A-Limitierung. So erweisen sich eine große Anzahl von Sätzen, die ausführlich besonders in den Arbeiten von H. Holzberger[21]) und C. M. Grisar[22]) entwickelt sind, als Spezialfälle unserer Permanenz- und Kernsätze, durch die sie wiederum in verschiedenen Richtungen verschärft und erweitert werden.

6. Als Beispiel verschiedener Dimension bei den eben behandelten Grenzprozessen sei etwa

$$g(y_1, y_2) = (1 - y_1 y_2) \sum_{n=0}^{\infty} s_n y_1^n y_2^n$$

als Übergang von einer einfachen Folge zu einer Funktion von zwei Veränderlichen und

$$g(y) = (1-y)^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} y^{m+n}$$

---

[21]) H. Holzberger, Über das Verhalten von Potenzreihen mit zwei und drei Veränderlichen an der Konvergenzgrenze, Monatsh. f. Math. u. Phys. **25** (1914), S. 179–266.

[22]) C. M. Grisar, Über eine Verallgemeinerung des Tauberschen Satzes und seine Ausdehnung auf n-fache Reihen, Dissert. München 1924.

als Übergang von einer Doppelfolge zu einer Funktion von einer Veränderlichen erwähnt. Beides sind echte Transformationen.

7. Die *B-Limitierung* bei zwei- oder mehrfachen Folgen bietet sich im Rahmen unserer Sätze ebenso einfach dar: Die Doppelfolge s_{mn} wird durch

$$e^{-(y_1+y_2)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{s_{mn}}{m!\,n!}\, y_1^m\, y_2^n = g(y_1, y_2)$$

(unter der Annahme, daß diese Reihe für alle positiven y_1, y_2 konvergiert) in eine Funktion $g(y_1, y_2)$ zweier positiver Veränderlicher — ihre B-Transformation — verwandelt. Diese Transformation ist ersichtlich wieder echt[23]); sie gehört zum Perronschen Typus. Erfüllt also s_{mn} die Forderung B (vgl. **1.**), so gelten wieder drei Aussagen, die den unter **1.** in a), b) und c) gemachten genau entsprechen. — Diese B-Limitierung mehrfacher Folgen scheint bisher noch nicht genauer untersucht worden zu sein. Dies gilt auch

8. von deren *E_p-Limitierung*, bei der s_{mn} durch

$$t_{mn} = \frac{1}{(2^p)^{m+n}} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \binom{m}{\mu}\binom{n}{\nu} (2^p-1)^{m+n-\mu-\nu}\, s_{\mu\nu}$$

zu ersetzen ist. Diese Mittelbildung ist wieder eine echte, so daß unsere Sätze zuständig sind. Bezüglich dieser E_p-Limitierung, bezüglich des Übergangs von den E_p- zu den E_q-Mitteln oder von den E_p-Mitteln zur B-Transformation der s_{mn} liegen die Dinge ganz so, wie bei **2.** und **4.** für das C_k- und A-Verfahren gezeigt wurde (vgl. hierzu noch § 5, 7).

Mit diesen Beispielen wollen wir uns begnügen, um die Anwendungsmöglichkeiten unserer Sätze in der engeren Theorie der divergenten Reihen zu illustrieren. Bei ihnen handelte es sich stets um die Transformation von *mehrfachen Folgen in Folgen* oder von solchen *Folgen in Funktionen*

---

[23]) Beweis: 1. $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \varphi_{mn}(y_1, y_2) = e^{-y_1-y_2} \dfrac{y_1^m\, y_2^n}{m!\,n!}$ ist nie negativ.

2. $\Phi(\mathfrak{y}) = e^{-y_1-y_2} \sum\limits_{m,n=0}^{\infty} \dfrac{y_1^m\, y_2^n}{m!\,n!} = 1$ für jedes (y_1, y_2). Also ist a) erfüllt.

3. Bedingung b) fordert, daß

$$\sum e^{-y_1-y_2} \frac{y_1^\mu\, y_2^\nu}{\mu!\,\nu!},$$

bei festem (m, n) über alle μ, ν erstreckt, für die *entweder* $\mu \leqq m$ *oder* $\nu \leqq n$ ist, gegen 0 strebt für $(y_1, y_2) \to (\infty, \infty)$. Diese Summe ist aber

$$< \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} + \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\infty} = e^{-y_2} \sum_{\mu=0}^{m} \frac{y_1^\mu}{\mu!} + e^{-y_1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{y_2^\nu}{\nu!}$$

und strebt also $\to 0$ für $(y_1, y_2) \to (\infty, \infty)$.

von mehreren Variablen. Ich überspringe die ähnlich zu bildenden Transformationen von *Funktionen in Funktionen bei mehreren Variablen* (vgl. § 3, 1 bis 11) und gebe für diese Transformationen ein paar ganz anders geartete Beispiele, um schließlich die Transformation von *Funktionen in Folgen beim mehrdimensionalen Falle* durch weitere Beispiele zu illustrieren und unsere Sätze darauf anzuwenden:

9. *Das Poissonsche Integral in der Ebene.* Hier zeigt es sich, daß der klassische H. A. Schwarzsche Satz vom Anschluß an die vorgeschriebenen Randwerte unmittelbar in unserm Kernsatz enthalten ist. Es handelt sich dabei um die Transformation eines eindimensionalen Grenzprozesses in einen zweidimensionalen.

Der $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Raum sei je die gewöhnliche Ebene. Als „Flächenstück" $\mathfrak{F}_x$ werde die Peripherie des Einheitskreises mit Ausnahme des speziellen Punktes $\bar{\mathfrak{x}}$ derselben gewählt[24]), auf der die reelle, integrierbare Funktion $f(\mathfrak{x})$ gegeben ist. Für $\mathfrak{F}_y$ werde das Innere des Einheitskreises genommen und $\bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{x}}$ gewählt[25]).

Führt man nun in üblicher Weise Polarkoordinaten ein, indem man auf $\mathfrak{F}_x$ $\mathfrak{x} = (1, \psi) = \psi$, $f(\mathfrak{x}) = f(\psi)$ und auf $\mathfrak{F}_y$ $\mathfrak{y} = (r, \vartheta)$ setzt, so transformiert das Poissonsche Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}\,d\psi \qquad (\gamma = \vartheta - \psi)$$

die gegebene Funktion $f(\mathfrak{x})$ in eine Funktion $g(\mathfrak{y}) = g(r, \vartheta)$, die hierdurch auf $\mathfrak{F}_y$ definiert ist[26]).

Diese Poissonsche oder P-Transformation ist wieder eine *echte*; denn der Faktor von $f(\psi)\,d\psi$ im Integranden ist nie negativ und es ist

$$\text{a)} \qquad \Phi(\mathfrak{y}) = \Phi(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}\,d\psi = 1$$

---

[24]) Als Parameterdarstellung kann man etwa nehmen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos t \\ x_2 &= \sin t \end{aligned}\right\} \text{ mit } T\colon\ \tau - \pi \leqq t \leqq \tau + \pi,$$

wenn τ den Arcus von $\bar{\mathfrak{x}}$ bedeutet.

[25]) Parameterdarstellung etwa:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= t_2 \cos t_1 \\ y_2 &= t_2 \sin t_1 \end{aligned}\right\} \text{ mit } \begin{cases} S_1\colon\ \sigma_1 - \pi \leqq t_1 \leqq \sigma_1 + \pi, & \sigma_1 = \tau, \\ S_2\colon\ 0 \leqq t_2 < 1, & \sigma_2 = 1. \end{cases}$$

[26]) Statt der eigentlich zu nehmenden Integrationsgrenzen $\tau - \pi$ und $\tau + \pi$ durfte hier natürlich 0 und 2π geschrieben werden.

für alle $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{F}_y$, so daß gewiß $\Phi(\mathfrak{y}) \to 1$ strebt für $\mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}}$ auf $\mathfrak{F}_y$ (und überdies die engeren Voraussetzungen des Zusatzes in § 10 erfüllt sind);

b) $$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\tau-\pi}^{\tau-\delta} + \int_{\tau+\delta}^{\tau+\pi}\right) \frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}\, d\psi$$

für jedes (r, ϑ) auf $\mathfrak{F}_y$ vorhanden und strebt $\to 0$ für $\mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}}$ auf $\mathfrak{F}_y$, da der Nenner für alle ψ des Integrationsweges und alle hinreichend nahe bei $\bar{\mathfrak{y}}$ gelegenen $\mathfrak{y}$ oberhalb einer festen, positiven Zahl verbleibt, während der Zähler zu 0 abnimmt.

Setzen wir nun $f(\mathfrak{x})$ noch als beschränkt voraus, so genügt es für jede Lage von $\mathfrak{x}$ der Forderung B. Daher liegt der Kern $\mathfrak{K}'$ des Grenzprozesses

$g(r, \vartheta)$ für $(r, \vartheta) \rightarrowtail (1, \tau)$ aus dem Innern des Einheitskreises

in dem Kern $\mathfrak{K}$ des Grenzprozesses

$f(\psi)$ für $\psi \to \tau$ längs der Peripherie des Einheitskreises.

Für den Fall, daß ψ in τ stetig ist oder eine Unstetigkeit erster Art erleidet, haben wir hierin den erwähnten klassischen Satz von H. A. Schwarz[27]) und im allgemeinen Fall eine Verschärfung desselben. Eine Analyse dieses Beweises zeigt natürlich, daß er seinem Wesen nach mit dem ursprünglich von H. A. Schwarz gegebenen übereinstimmt. Es handelt sich eben nur, wie bei allen andern Beispielen, um eine Subsumierung zahlreicher bekannter Dinge unter unsern allgemeinen Kernsatz.

10. *Das Poissonsche Integral im Raume* läßt sich ganz analog behandeln. Es handelt sich dabei um die Transformation eines zweidimensionalen Grenzprozesses in einen dreidimensionalen. Wir erhalten so das räumliche Analogon zu dem Schwarzschen Satze, das man für stetige Randfunktionen z. B. bei Picard[28]) ausgeführt findet. Unser Kernsatz liefert auch diesen Satz und wieder in verschärfter Form:

Wir nehmen als $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Raum den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum, als $\mathfrak{F}_x$ die Oberfläche der Einheitskugel mit Ausnahme eines speziellen Punktes $\mathfrak{x}$ derselben und als $\mathfrak{F}_y$ das Innere dieser Einheitskugel. Bedeutet dann γ den Winkel zwischen den Radien nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und ist r der Abstand des Punktes $\mathfrak{y}$ vom Anfangspunkt, so führt das Poissonsche Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int^{(\mathfrak{F}_x)} f(\mathfrak{x})\, \frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}\, do = g(\mathfrak{y})$$

eine auf der Einheitskugel gegebene, beschränkte, integrierbare Funktion

[27]) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen 2, S. 175–210, bes. S. 186–188.
[28]) E. Picard, Traité d'Analyse 1 (2. Aufl., 1901), S. 161–167.

$f(\mathfrak{x})$ in eine in deren Innern definierte Funktion $g(\mathfrak{y})$ über. Da die Transformation, wie sich ebenso leicht ergibt wie in **9.**, wieder echt ist, so liegt der Kern des Grenzprozesses

$$g(\mathfrak{y}) \text{ für } \mathfrak{y} \to \bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{x}} \text{ aus dem Innern } \mathfrak{F}_y$$

in dem Kern des Grenzprozesses

$$f(\mathfrak{x}) \text{ für } \mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}} \text{ auf der Oberfläche } \mathfrak{F}_x.$$

Das ist aber der in Rede stehende Satz.

11. *Fouriersche Doppelreihen.* Die C_1-Summierung der Fourierschen Doppelreihen, die besonders von W. H. Young[29]), C. N. Moore[30]) und H. Geiringer[31]) behandelt worden ist, ist in ihren Hauptresultaten ebenfalls unmittelbar in unserm Kernsatz enthalten, der zugleich eine Präzisierung und Erweiterung mehrerer Sätze liefert.

Wir begnügen uns mit wenigen Angaben: Es sei $F(\mathfrak{u}) = F(u_1, u_2)$ eine reelle Funktion der beiden reellen Veränderlichen u_1, u_2, die in bezug auf jede der Veränderlichen die Periode 2π hat. Der Einfachheit halber nehmen wir an, sie sei beschränkt und integrierbar über das Fundamentalquadrat mit den Gegenecken $(0, 0)$ und $(2\pi, 2\pi)$. Ihr entspricht eine Fouriersche Doppelreihe

$$\sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} T_{n_1 n_2}$$

mit

$$T_{n_1 n_2} = a_{n_1 n_2} \cos n_1 u_1 \cos n_2 u_2 + b_{n_1 n_2} \cos n_1 u_1 \sin n_2 u_2 + c_{n_1 n_2} \sin n_1 u_1 \cos n_2 u_2 + d_{n_1 n_2} \sin n_1 u_1 \sin n_2 u_2 .$$

Dabei sind die Fourierkoeffizienten a, b, c, d durch gewisse Doppelintegrale der mit trigonometrischen Funktionen multiplizierten Funktion $F(u_1, u_2)$ über das Fundamentalquadrat gegeben. Von den Teilsummen

$$s_{n_1 n_2} = \sum_{\nu_1, \nu_2=0}^{n_1, n_2} T_{\nu_1 \nu_2}$$

bilden wir die arithmetischen Mittel

$$t_{n_1 n_2} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{\nu_1, \nu_2=0}^{n_1-1, n_2-1} s_{\nu_1 \nu_2} \qquad (n_1, n_2 = 1, 2, \ldots).$$

---

[29]) W. H. Young, On multiple Fourier series, Proc. London Math. Soc. (2) **11** (1912), S. 133–184.

[30]) C. N. Moore, On convergence factors in double series and the double Fourier's series, Trans. Americ. Math. Soc. **14** (1913), S. 73–104, sowie: On the summability of the double Fourier's series of discontinuous functions, Math. Annalen **74** (1913), S. 555–572.

[31]) H. Geiringer, Trigonometrische Doppelreihen, Monatshefte f. Math. u. Phys. **29** (1918), S. 65–144.

Dann ergibt sich genau so einfach wie bei einfachen Fourierreihen die Darstellung

$$t_{n_1 n_2} = t_{n_1 n_2}(u_1, u_2) = \frac{4}{n_1 n_2 \pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x_1, x_2) \left(\frac{\sin n_1 x_1}{\sin x_1}\right)^2 \left(\frac{\sin n_2 x_2}{\sin x_2}\right)^2 dx_1 dx_2,$$

bei der $f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2; u_1, u_2)$ das arithmetische Mittel der vier Funktionswerte

$$F(u_1 \pm 2x_1, u_2 \pm 2x_2)$$

bezeichnen soll. Diese Darstellung bedeutet aber — wir halten u_1, u_2 für den Augenblick fest — wieder eine echte Transformation von $f(\mathfrak{x}) = f(x_1, x_2)$ in $g(\mathfrak{y}) = t_{n_1 n_2}$. In der Tat ist zunächst

$$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{4}{n_1 n_2 \pi^2} \left(\frac{\sin n_1 x_1}{\sin x_1}\right)^2 \left(\frac{\sin n_2 x_2}{\sin x_2}\right)^2$$

nie negativ; und da wir für $\mathfrak{F}_x$ das Quadrat mit den Gegenecken $(0, 0)$ und $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit Ausnahme des Punktes $\bar{\mathfrak{x}} = (0, 0)$ zu wählen haben, so existiert für jedes $\mathfrak{y} = (n_1, n_2)$

$$\Phi(\mathfrak{y}) = \frac{4}{n_1 n_2 \pi^2} \int^{(\mathfrak{F}x)} \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, d\mathfrak{x}$$

und ist sogar identisch $= 1$. Ist aber $\mathfrak{f}_x$ eine Umgebung von $\bar{\mathfrak{x}}$, etwa $(0 < x_1 \leqq \delta_1,\ 0 < x_2 \leqq \delta_2)$, so existiert auch

$$\frac{4}{n_1 n_2 \pi^2} \int^{(\mathfrak{F}x - \mathfrak{f}x)} \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, d\mathfrak{x}$$

und strebt, wie einfachste Abschätzungen sofort zeigen, gegen 0 für $(n_1, n_2) \to (+\infty, +\infty)$. Daher liegt der Kern des Grenzprozesses

$$t_{n_1 n_2} \quad \text{für} \quad (n_1, n_2) \to (+\infty, +\infty)$$

in dem Kern des Grenzprozesses

$$f(x_1, x_2) \quad \text{für} \quad (x_1, x_2) \to (+0, +0).$$

Ist also z. B. F an der betrachteten Stelle (u_1, u_2) stetig, so besteht der letztgenannte Kern genau aus dem einen Punkte $F(u_1, u_2)$, und folglich strebt auch $t_{n_1 n_2}$ gegen diesen Wert: *Die Fouriersche Doppelreihe ist an jeder Stetigkeitsstelle der entwickelten Funktion C_1-summierbar zum Funktionswerte.* Das ist die Übertragung des Fejérschen Satzes (vgl. § 3, 12 und § 5, 12) auf Fouriersche Doppelreihen. Doch genügt es natürlich, daß hier $f(x_1, x_2)$ für $(x_1, x_2) \to (+0, +0)$ existiert. Die C_1-Summe der Reihe ist dann gleich diesem Werte. Damit sind auch einige der besonders von C. N. Moore untersuchten Fälle von Unstetigkeiten der Funktion F in (u_1, u_2) erfaßt.

Darüber hinaus liefert unser Kernsatz ohne jede weitere Voraussetzung über das Verhalten von F an der Stelle (u_1, u_2), daß bei $(x_1, x_2) \to (0, 0)$ bzw. $(n_1, n_2) \to (\infty, \infty)$

$$\underline{\lim}\, f(x_1, x_2) \leqq \underline{\lim}\, t_{n_1 n_2} \leqq \overline{\lim}\, f(x_1, x_2)$$

ist. — Auch die in § 5, 12 behandelte Lebesguesche Erweiterung des Fejérschen Satzes läßt sich[32]) auf Fouriersche Doppelreihen übertragen und genau so wie die über einfache Fourierreihen unter unsern Kernsatz subsumieren.

12. Bei dem A-Verfahren wird an Stelle der Teilsummen $s_{n_1 n_2}$ der Fourierschen Doppelreihe $\sum T_{n_1 n_2}$ die Funktion

$$g(y_1, y_2) = \sum T_{n_1 n_2} y_1^{n_1} y_2^{n_2} \qquad (0 \leqq y_1 < 1,\ 0 \leqq y_2 < 1)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x_1, x_2) \frac{1-y_1^2}{1-2y_1\cos x_1 + y_1^2} \frac{1-y_2^2}{1-2y_2\cos x_2 + y_2^2}\, dx_1\, dx_2$$

gesetzt, bei der jetzt $f(x_1, x_2)$ das arithmetische Mittel aus den vier Funktionswerten $F(u_1 \pm x_1, u_2 \pm x_2)$ zu bedeuten hat.

Die Transformation ist wieder eine echte, und es lassen sich daher genau die gleichen Schlüsse daraus ziehen, wie eben für die C_1-Transformation.

13. Achtet man endlich bei den Überlegungen in **11.** und **12.** noch auf die Abhängigkeit der Funktionen $f(x_1, x_2)$ und $t_{n_1 n_2}$ von der Lage des gewählten Punktes (u_1, u_2) und zieht demgemäß den Kernsatz bei Abhängigkeit von einem Parameter $\mathfrak{u} = (u_1, u_2)$ heran, so ergeben sich weitere Folgerungen, die den in § 8, Beispiel 5 bis 8, gezogenen entsprechen würden. Insbesondere gestatten die Betrachtungen der dortigen Beispiele 7 und 8 jetzt sofort eine Erweiterung auf den Fall, daß die Kurve $\mathfrak{B}$ in einem drei- oder mehrdimensionalen Raume liegt, oder daß statt der Kurve Flächen in Betracht gezogen werden.

14. *Die Laplacesche Reihe.* L. Fejér hat seine Entdeckung, daß gewisse Mittel der Teilsummen der Fourierreihe durch eine — in unserer Ausdrucksweise — *echte Mittelbildung* aus der darzustellenden Funktion hervorgehen, alsbald auf die *Laplacesche Reihe* übertragen können[33]). Seine Betrachtungen geben uns ein Beispiel für die Transformation eines auf einer Kugelfläche des gewöhnlichen Raumes verlaufenden *zwei*dimensionalen Grenzprozesses in einen *ein*dimensionalen, nämlich die Bildung des Grenzwertes einer Zahlenfolge:

[32]) Vgl. die oben genannte Abhandlung von H. Geiringer sowie: M. Kleberger, Über eine von Weierstraß gegebene Definition der analytischen Funktion, Dissert. Gießen 1921 (Mitteilungen d. Math. Sem. Gießen, II. Heft).

[33]) L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe, Math. Annalen **67** (1909), S. 76—109.

Auf der Einheitskugel des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes sei eine reelle Funktion $F(\mathfrak{u})$ gegeben, die beschränkt und über die Einheitskugel integrierbar sei. Wir halten einen speziellen Punkt $\mathfrak{u}$ fest und bezeichnen mit $\mathfrak{F}_x$ die Oberfläche der Kugel mit Ausnahme dieses einen Punktes, den wir zum Nullpunkt $\mathfrak{x}$ der $\mathfrak{x}$-Koordinaten machen. Ist dann γ der sphärische Abstand des variablen Punktes $\mathfrak{x}$ von diesem Anfangspunkt und $f(\mathfrak{x})$ der Wert der Funktion F in dem durch die Variable $\mathfrak{x}$ bezeichneten Kugelpunkt, so ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \overset{(\mathfrak{F}x)}{\int} f(\mathfrak{x})\, P_n(\cos\gamma)\, d\mathfrak{x}$$

die zu F gehörige Laplacesche Reihe im Punkte $\mathfrak{u}$, wenn $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom bedeutet.

Die C_2-Mittel t_n der Teilsummen dieser Reihe werden nun offenbar durch

$$(*) \qquad t_n = \frac{1}{4\pi} \overset{(\mathfrak{F}x)}{\int} f(\mathfrak{x})\, c_n^{(2)}(\gamma)\, d\mathfrak{x}$$

dargestellt, wenn mit $c_n^{(2)}(\gamma)$ die C_2-Mittel der Teilsummen der speziellen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(\cos\gamma)$$

bezeichnet werden. L. Fejér hat nun zunächst bewiesen (a. a. O. Theorem I), daß für alle n und γ stets

$$c_n^{(2)}(\gamma) \geqq 0$$

ist, und ferner (a. a. O. Theorem II), daß

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{(2)}(\gamma) = 0$$

ist gleichmäßig für alle γ in $\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi$, wenn $0 < \varepsilon < \pi$ ist. Endlich ist — sogar für jedes n —

$$(**) \qquad \frac{1}{4\pi} \overset{(\mathfrak{F}x)}{\int} c_n^{(2)}(\gamma)\, d\mathfrak{x} = 1.$$

Dies alles besagt aber, daß — in unserer Ausdrucksweise — in (*) eine echte Transformation vorliegt. Daher liegt der Kern des Grenzprozesses

$$t_n \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

in dem Kern des Grenzprozesses

$$f(\mathfrak{x}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \to \bar{\mathfrak{x}} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{F}_x.$$

Insbesondere ist also *die Laplacesche Reihe in jedem Punkte* $\mathfrak{x}$, *für den* $\lim_{\mathfrak{x}\to\bar{\mathfrak{x}}} f(\mathfrak{x})$ *existiert,* C_2*-summierbar.*

15. Die Laplace-Reihe selbst weist in der Nähe von Unstetigkeitsstellen der entwickelten Funktion eine zur Gibbsschen Erscheinung bei den Fourierreihen analoge Besonderheit auf, die von H. Weyl eingehend studiert worden ist[34]). Da nun unser oben erhaltenes Ergebnis — ganz wie in § 8, Beispiel 5, für die Fourierreihen ausgeführt — bestehen bleibt, wenn wir bei $f(\mathfrak{x})$ und t_n noch die Abhängigkeit von der Stelle $\mathfrak{u}$ berücksichtigen und demgemäß den Kernsatz bei Abhängigkeit von einem Parameter heranziehen, so zeigt sich sofort, *daß die C_2-Mittel t_n der Teilsummen der Laplaceschen Reihe die Gibbssche Erscheinung nicht mehr aufweisen können.* (Für die Einzelheiten der Durchführung der Beweise vgl. § 8, Beispiel 5.)

16. Auch die Betrachtungen aus § 8, Beispiel 7, haben ihr Analogon bei den Laplaceschen Reihen[35]), und dies läßt sich daher ebenfalls unter unsern Kernsatz subsumieren:

Ist die Funktion $F(\mathfrak{u})$ nicht, wie in den beiden letzten Beispielen, reell, wird sie also nicht durch Punkte des eindimensionalen Raumes veranschaulicht, geschieht dies vielmehr durch Punkte eines dreidimensionalen Raumes[36]), so liefert sie dort eine bestimmte „Fläche".

Für jedes $\mathfrak{u}$ denken wir uns jede der Koordinaten von $F(\mathfrak{u})$ in die Laplacesche Reihe entwickelt. Dann sei $t_n = t_n(\mathfrak{u})$ derjenige Punkt des Raumes, dessen drei Koordinaten beziehentlich die C_2-Mittel der Teilsummen dieser drei Laplaceschen Reihen sind. Man darf wohl auch, indem man die drei Koordinaten formal zusammenfaßt (vgl. § 8, Beispiel 7), kurz sagen, die $t_n(\mathfrak{u})$ seien die C_2-Mittel der zu $F(\mathfrak{u})$ gehörigen Laplaceschen Reihe. Diese $t_n(\mathfrak{u})$ liefern dann, wenn $\mathfrak{u}$ die Kugeloberfläche durchläuft, für jedes n eine stetige, geschlossene Fläche M_n, die Fejér *die n-te Laplacesche Mittelfläche (zweiter Ordnung)* der gegebenen Fläche F nennt. Analog sind die n-te Mittelfläche erster Ordnung und die n-te Annäherungsfläche (die den Teilsummen selbst entspricht) definiert.

Während sich nun über die Lage dieser letzten Flächen zu F keine besonders einfachen Aussagen allgemeiner Art machen lassen, gilt bezüglich der M_n der Satz, *daß alle M_n in dem kleinsten konvexen Bereiche liegen, der die Fläche F enthält.*

Da die jetzigen $t_n = t_n(\mathfrak{u})$ formal wieder durch die Transformation (*) in **14.** aus $f(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ hervorgehen — nur daß $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ und $t_n(\mathfrak{u})$

---

[34]) H. Weyl, Die Gibbssche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **29** (1910), S. 308—323; sowie ebenda **30** (1910), S. 377—407 und **32** (1911), S. 118—131.

[35]) L. Fejér, a. a. O. Fußnote [4]).

[36]) Für den Fall eines r-dimensionalen Raumes verlaufen die Betrachtungen genau ebenso.

jetzt „dreidimensionale" Größen sind — und da diese Transformation als echt erkannt war, so ist der allgemeine Kernsatz zuständig und wegen der für jedes n gültigen Beziehung (**) in **14.** sind auch die Voraussetzungen für dessen Zusatz erfüllt. Dieser besagt aber gerade, daß $t_n(\mathfrak{u})$ für jedes n und $\mathfrak{u}$ — d. h. eben die ganze Fläche M_n — in dem kleinsten konvexen Bereiche liegt, der alle Werte $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ oder eben die Fläche F enthält.

Auch für die in § 8, Beispiel 8 und 9, angestellten Überlegungen aus der Theorie der Fourierreihen lassen sich leicht die Analoga in der Theorie der Laplaceschen Reihe bilden und als Spezialfälle des allgemeinen Kernsatzes und seines Zusatzes auffassen.

Doch dürften die nun durchgeführten Beispiele wohl genügen, um die vielseitige Anwendungsfähigkeit dieser Sätze zu illustrieren.

Zum Schluß sei noch hervorgehoben, daß die Betrachtungen vor allem noch nach zwei Richtungen hin einer Verfeinerung fähig sind. Einmal haben wir die mehrdimensionalen Grenzprozesse stets im gewöhnlichen (Pringsheimschen) Sinne aufgefaßt, nach dem alle Koordinaten *simultan* bestimmten Grenzwerten zustreben. Läßt man sie einzeln oder in einzelnen Gruppen gegen ihre Limites laufen, so entstehen *iterierte* Grenzprozesse, für die die Verhältnisse vielfach anders und im allgemeinen komplizierter liegen. Auf der andern Seite endlich erscheint es wünschenswert, die Voraussetzung, daß die transformierende Funktion $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u})$ nie negativ sein solle, zu mildern. Bei Satz 1 in § 1 und seinen Erweiterungen 1a in § 6 und 1b in § 10 trat dann die Voraussetzung auf, daß es eine Konstante M geben soll, so daß für jede Umgebung $\mathfrak{f}_x$ von $\mathfrak{x}$, jedes $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{U}$ und jedes hinreichend nahe bei $\bar{\mathfrak{y}}$ gelegene $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{F}_y$

$$\int^{(\mathfrak{F}x - \mathfrak{f}x)} |\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u})|\, dt < M$$

bleibt. Auch auf diesen Fall lassen sich die Kernsätze, wenigstens zu einem Teile, ausdehnen, doch verlieren sie dabei notwendig einiges von ihrer bisherigen Prägnanz.

Tübingen, den 11. September 1929.

(Eingegangen am 13. September 1929.)

Rollkurven im Raume.

Von

Gerhard Kowalewski in Dresden.

Wenn eine ebene Kurve auf einer andern rollt, so kommen die Linienelemente der rollenden Kurve mit denen der festen Kurve sukzessiv zur Deckung. Es wird auf solche Weise eine Abbildung der einen Kurve auf die andere hergestellt, die bei gleitungslosem Rollen bogentreu ist. Diese bogentreue Abbildung habe ich einer früheren Arbeit [1]) zum Ausgangspunkt einer neuen Rollkurventheorie gemacht, die sich auf beliebige Transformationsgruppen übertragen ließ. Es gelang sogar, ein genaues Analogon zu den Epizykloiden bei jeder Transformationsgruppe nachzuweisen, und es ergab sich z. B. bei der speziellen Affingruppe eine bisher noch nie beachtete Kurve, die man mit Fug und Recht als Affinzykloide bezeichnen kann, weil ihre Entstehung die genaue affingeometrische Nachbildung des Vorganges ist, der in der euklidischen Geometrie die Zykloide erzeugt.

In vorliegender Arbeit werden entsprechende Betrachtungen für den Raum entwickelt, und zwar anknüpfend an zwei Beispiele. Auch hier handelt es sich um Überlegungen, die nicht an eine bestimmte Gruppe gebunden sind. Bei Gruppen mit ungerader Parameterzahl, die durch das erste Beispiel vertreten werden, gestaltet sich die Theorie genau so, wie in der Ebene. Bei gerader Parameterzahl ergeben sich Abweichungen. Wie man in solchem Falle vorzugehen hat, zeigt das zweite Beispiel. Ich beabsichtige diese Untersuchungen, die eine Fülle interessanter und vollkommen neuer geometrischer Beziehungen erschließen, noch weiter fortzusetzen.

[1]) Leipziger Berichte vom 29. 4. 1929.

§ 1.

Vorbereitende Bemerkungen über die äquiforme Gruppe des Raumes.

Die äquiforme Gruppe des Raumes wird erzeugt durch folgenden Gruppenkeim:

$$p, q, r, \quad xp + yq + zr, \quad zq - yr, \quad xq - yp, \quad xr - zp.$$

Sie transformiert die Kurvenelemente 2. Ordnung, also die Wertsysteme

$$(e) \qquad x, y, z, y_1, z_1, y_2, z_2$$

transitiv. Die Liesche Determinante $J(e)$ lautet hier nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & z & 0 & 0 & -y_2 & -z_2 \\ 0 & z & -y & z_1 & -y_1 & z_2 & -y_2 \\ -y & x & 0 & 1+y_1^2, & y_1 z_1, & 3y_1 y_2, & 2y_1 z_2 + z_1 y_2 \\ -z & 0 & x & y_1 z_1, & 1+z_1^2, & y_1 z_2 + 2z_1 y_2, & 3z_1 z_2 \end{vmatrix}$$

und hat den Wert

$$(1 + y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2).$$

Wenn wir uns auf reelle Gebilde beschränken, so können wir als Repräsentanten der nichtsingulären Kurvenelemente 2. Ordnung das Element

$$(e_0) \qquad \begin{cases} x & y & z & y_1 & z_1 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{cases}$$

betrachten. Dieses Element e_0 benutzen wir auch als Anfangselement zur scharfen Definition der Fundamentalgrößen unserer Gruppe. Das *Bogenelement* ist diejenige Invariante von der Form $\omega(e)\,dx$, die sich für $e = e_0$ auf dx reduziert. Die *Differentialinvarianten* I und J sind diejenigen Invarianten von der Form [2])

$$I = \alpha_1(e) + \beta_1(e)\, y_3 + \gamma_1(e)\, z_3,$$
$$J = \alpha_2(e) + \beta_2(e)\, y_3 + \gamma_2(e)\, z_3,$$

---

[2]) Daß man I und J in dieser Form ansetzen darf, beruht auf einem allgemeinen Satze, den ich in meiner Abhandlung über „Differentialinvarianten von Raumkurven" (Crelles Journal **155**) aufgestellt habe. Einen einfachen geometrischen Beweis für diesen Satz findet man in meiner Arbeit „Geometrisches über die Pickschen Fundamentalgrößen", Leipziger Berichte 1926.

die für $e = e_0$ in y_3 und z_3 übergehen. Endlich sind die *Relativkoordinaten* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ eines Punktes P in bezug auf e diejenigen Invarianten von der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(P, e), \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(P, e), \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(P, e),$$

die sich in die cartesischen Koordinaten X, Y, Z des Punktes P verwandeln, sobald e mit e_0 zusammenfällt.

Wenn e längs einer durch e_0 gehenden Kurve $\mathfrak{K}$ variiert und das von e_0 bis e längs $\mathfrak{K}$ genommene Integral $\int \omega\, dx$ mit s bezeichnet wird (Äquiformbogen $e_0 e$), so genügen die auf e bezogenen Relativkoordinaten eines festen Punktes P gewissen Differentialgleichungen, den Pickschen *Identitätsbedingungen*. Man kann sie nach einer von mir angegebenen Vorschrift direkt aufstellen, ohne vorher die Fundamentalgrößen berechnet zu haben [3]). Im vorliegenden Falle lautet meine die Identitätsbedingungen zusammenfassende Identitätsformel folgendermaßen:

$$\frac{d\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{ds} = -\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{p} - \mathfrak{x}\mathfrak{q} + I(\mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q} + \mathfrak{z}\mathfrak{r}) + J(\mathfrak{z}\mathfrak{q} - \mathfrak{y}\mathfrak{r}).$$

Aus dieser Formel entstehen die Identitätsbedingungen dadurch, daß man $\mathfrak{F} = \mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{F} = \mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{F} = \mathfrak{z}$ setzt. Man findet auf solche Weise

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{x}}{ds} = -1 + I\mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \\ \dfrac{d\mathfrak{y}}{ds} = -\mathfrak{x} + I\mathfrak{y} + J\mathfrak{z}, \\ \dfrac{d\mathfrak{z}}{ds} = \quad -J\mathfrak{y} + I\mathfrak{z}. \end{cases}$$

Sind die natürlichen Gleichungen der Kurve $\mathfrak{K}$ bekannt, also I und J gegebene Funktionen von s, so erhält man durch Integration des Systems (1) $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ausgedrückt durch s und durch die Anfangswerte X, Y, Z

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \varphi(X, Y, Z, s), \\ \mathfrak{y} = \chi(X, Y, Z, s), \\ \mathfrak{z} = \psi(X, Y, Z, s). \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen, wie aus dem Begriff der Relativkoordinaten gefolgert werden kann [4]), die äquiforme Transformation $T_e^{e_0}$ dar, die das an der Stelle s liegende Element e der Kurve $\mathfrak{K}$ in das Anfangselement e_0 überführt. Daher darf man in (2) statt $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ einsetzen $0, 0, 0$ und statt

[3]) Math. Zeitschr. **23**. Die Übertragung des dort entwickelten Verfahrens auf den Raum bedarf keiner weiteren Erklärung.

[4]) Vgl. z. B. meine Arbeit „Bestimmung einer Kurve aus ihrer natürlichen Gleichung", Leipziger Berichte 1928.

X, Y, Z die Koordinaten x, y, z des Punktes von e. Löst man die Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} 0 = \varphi(x, y, z, s), \\ 0 = \chi(x, y, z, s), \\ 0 = \psi(x, y, z, s) \end{cases}$$

nach x, y, z auf, so erhält man die Kurve $\mathfrak{K}$ in Parameterdarstellung. Damit ist eine Methode gewonnen, um eine Kurve aus ihren äquiformen natürlichen Gleichungen zu bestimmen, und es ist klar, daß diese Methode für jede Gruppe mit ungerader Parameterzahl in Geltung bleibt.

Man kann übrigens die Integration des Systems (1) so durchführen, daß die Relationen (2) nach X, Y, Z aufgelöst herauskommen. Zu diesem Zwecke betrachte man das zu (1) adjungierte homogene System

$$(1^*)\qquad \begin{cases} \frac{d\mathfrak{u}}{ds} = -I\mathfrak{u} + \mathfrak{v}, \\ \frac{d\mathfrak{v}}{ds} = -\mathfrak{u} - I\mathfrak{v} + J\mathfrak{w}, \\ \frac{d\mathfrak{w}}{ds} = \quad -J\mathfrak{v} - I\mathfrak{w}. \end{cases}$$

Jede Lösung $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ des Systems (1) steht zu jeder Lösung $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ des Systems (1^*) in der Beziehung

$$(4)\qquad \frac{d}{ds}(\mathfrak{u}\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\mathfrak{y} + \mathfrak{w}\mathfrak{z}) = -\mathfrak{u}.$$

Hat man nun für das homogene System (1^*) drei Lösungen

$$(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{w}_1), \quad (\mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{w}_2), \quad (\mathfrak{u}_3, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{w}_3)$$

bestimmt, die sich für $s = 0$ auf

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

reduzieren, und bedenkt man, daß die Anfangswerte von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gerade X, Y, Z sein sollen, so ergibt sich aus (4), durch Integration von 0 bis s,

$$(5)\qquad \begin{cases} X = \mathfrak{u}_1\mathfrak{x} + \mathfrak{v}_1\mathfrak{y} + \mathfrak{w}_1\mathfrak{z} + \int_0^s \mathfrak{u}_1\, ds, \\ Y = \mathfrak{u}_2\mathfrak{x} + \mathfrak{v}_2\mathfrak{y} + \mathfrak{w}_2\mathfrak{z} + \int_0^s \mathfrak{u}_2\, ds, \\ Z = \mathfrak{u}_3\mathfrak{x} + \mathfrak{v}_3\mathfrak{y} + \mathfrak{w}_3\mathfrak{z} + \int_0^s \mathfrak{u}_3\, ds. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben die Auflösung von (2) nach X, Y, Z, stellen also die Transformation $T^e_{e_0}$ dar. Die Parameterstellung von $\mathfrak{K}$, die durch

Auflösen der Gleichungen (3) nach x, y, z gewonnen wurde, läßt sich jetzt explizit angeben und lautet

$$(6) \qquad x = \int_0^s \mathfrak{u}_1 \, ds, \quad y = \int_0^s \mathfrak{u}_2 \, ds, \quad z = \int_0^s \mathfrak{u}_3 \, ds.$$

Ist die Kurve $\mathfrak{K}$ eine Bahnkurve der äquiformen Gruppe, so haben I und J längs $\mathfrak{K}$ konstante Werte α und β. Man findet in diesem Falle für das System (1*) folgende Fundamentallösungen, wobei zur Abkürzung $\sqrt{1+\beta^2} = \gamma$ gesetzt worden ist:

$$\mathfrak{u}_1 = \gamma^{-2} e^{-\alpha s}(\beta^2 + \cos\gamma s), \quad \mathfrak{v}_1 = -\gamma^{-1} e^{-\alpha s} \sin\gamma s, \quad \mathfrak{w}_1 = \beta\gamma^{-2} e^{-\alpha s}(1 - \cos\gamma s$$
$$\mathfrak{u}_2 = \gamma^{-1} e^{-\alpha s} \sin\gamma s \quad , \quad \mathfrak{v}_2 = e^{-\alpha s} \cos\gamma s \quad , \quad \mathfrak{w}_2 = -\beta\gamma^{-1} e^{-\alpha s} \sin\gamma s,$$
$$\mathfrak{u}_3 = \beta\gamma^{-2} e^{-\alpha s}(1 - \cos\gamma s), \quad \mathfrak{v}_3 = \beta\gamma^{-1} e^{-\alpha s} \sin\gamma s \, , \quad \mathfrak{w}_3 = \gamma^{-2} e^{-\alpha s}(1 + \beta^2 \cos\gamma$$

Diese Werte müssen nun in die Gleichungen (5) eingeführt werden. Es empfiehlt sich dabei, die Größen X, Y, Z und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ einer äquiformen Transformation zu unterwerfen, und zwar muß man setzen

$$\beta X + Z - \beta\alpha^{-1} = X', \quad \gamma Y - \gamma(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} = Y', \quad \beta Z - X + \alpha(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} = Z'$$

und entsprechend

$$\beta\mathfrak{x} + \mathfrak{z} - \beta\alpha^{-1} = \mathfrak{x}', \quad \gamma\mathfrak{y} - \gamma(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} = \mathfrak{y}', \quad \beta\mathfrak{z} - \mathfrak{x} + \alpha(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} = \mathfrak{z}'.$$

Dann nehmen die Gleichungen (5) folgende Gestalt an:

$$(5') \qquad \begin{cases} X' = \mathfrak{x}' e^{-\alpha s}, \\ Y' = \mathfrak{y}' e^{-\alpha s} \cos\gamma s - \mathfrak{z}' e^{-\alpha s} \sin\gamma s, \\ Z' = \mathfrak{y}' e^{-\alpha s} \sin\gamma s + \mathfrak{z}' e^{-\alpha s} \cos\gamma s. \end{cases}$$

Setzt man $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gleich Null, so ergibt sich die Parameterdarstellung der Kurve $\mathfrak{K}$ (in gestrichenen Koordinaten):

$$(6') \qquad \begin{cases} x' = -\beta\alpha^{-1} e^{-\alpha s}, \\ y' = -\gamma(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} e^{-\alpha s} \cos\gamma s - \alpha(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} e^{-\alpha s} \sin\gamma s, \\ z' = -\gamma(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} e^{-\alpha s} \sin\gamma s + \alpha(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} e^{-\alpha s} \cos\gamma s. \end{cases}$$

$\mathfrak{K}$ liegt auf dem Rotationskegel

$$y'^2 + z'^2 - \alpha^2\beta^{-2}(\alpha^2 + \gamma^2)^{-1} x'^2 = 0$$

und trifft die Geraden des Kegels unter konstantem Winkel. Ebenso ist $\mathfrak{K}$ isogonale Trajektorie auf dem Zylinder, dessen Geraden zur x'-Achse parallel sind. Die Kurve $\mathfrak{K}$ ist somit eine sogenannte zylindrokonische Schraubenlinie[5]). Die ∞^5 zylindrokonischen Schraubenlinien des Raumes sind also die Bahnkurven der äquiformen Gruppe. Sie sind das räumliche

[5]) Vgl. etwa E. Cesàro, Natürliche Geometrie, deutsch von G. Kowalewski, S. 183.

Analogon der logarithmischen Spiralen der Ebene, die als Bahnkurven bei der ebenen äquiformen Gruppe auftreten. Wir werden diese Kurven zur Erzeugung einer besonderen Klasse äquiformer Rollkurven im Raume benutzen, die als Analogon der Epizykloiden betrachtet werden dürfen[6]).

§ 2.

Äquiforme Rollkurven im Raume.

Durch das in § 1 eingeführte Anfangselement e_0 denke man sich zwei Kurven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gelegt und von der Stelle e_0 aus nach derselben Seite hin auf beiden den gleichen Äquiformbogen s abgetragen. Dadurch gelangt man zu zwei Stellen auf $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. Die dort liegenden Kurvenelemente 2. Ordnung mögen e_1 und e_2 heißen. Die Kurven sind auf diese Weise bogentreu (im äquiformen Sinne) aufeinander bezogen und e_1, e_2 sind die Kurvenelemente 2. Ordnung in zwei entsprechenden Punkten von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$.

Läßt man nun auf einen beliebig gewählten Punkt P_0 mit den Koordinaten X_0, Y_0, Z_0 die äquiformen Transformationen $T_{e_1}^{e_2}$ wirken, die den verschiedenen Werten von s entsprechen, so entsteht eine Kurve $P = (P_0)\, T_{e_1}^{e_2}$ oder

$$P = (P_0)\, T_{e_1}^{e_0}\, T_{e_0}^{e_2}, \tag{7}$$

die ich eine *äquiforme Rollkurve im Raume* nenne. Ich betrachte sie als erzeugt durch äquiformes Rollen von $\mathfrak{K}_1$ auf $\mathfrak{K}_2$. Da $(P_0) T_{e_1}^{e_0} = (P)\, T_{e_2}^{e_0}$ ist, so hat P in bezug auf e_2 dieselben Relativkoordinaten, wie P_0 in bezug auf e_1.

Diese Definition läßt sich offenbar in entsprechender Weise bei jeder räumlichen Transformationsgruppe mit ungerader Parameterzahl $2\varrho + 3$ durchführen, wobei statt der Elemente 2. Ordnung Kurvenelemente ϱ-ter Ordnung in Anwendung kommen. Wir wollen aber bei der äquiformen Gruppe bleiben und alles an diesem Beispiel demonstrieren.

Sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ Bahnkurven, also im vorliegenden Falle zylindrokonische Schraubenlinien, so entstehen *epizykloidische* äquiforme Rollkurven. Ich gebrauche diesen Ausdruck deshalb, weil in der ebenen euklidischen Geometrie durch Rollen von Kreis auf Kreis, also von Bahnkurve auf Bahnkurve, Epizykloiden hervorgehen. Es wäre zweckmäßig, bei jeder Gruppe die Bahnkurven der infinitesimalen Transformationen als *Kreise* zu bezeichnen, wie dies M. E. Junge in ihrer bedeutsamen Arbeit über die Verallgemeinerung der Krauseschen Geometrie schon getan hat (Leipziger Berichte 1928). Dann hätte die Benennung „epizykloidische Rollkurve“ oder kurz „Epizykloide“ ihre volle Berechtigung.

[6]) Vgl. die Behandlung des analogen Problems der Ebene in meiner Arbeit „Verallgemeinerung des Begriffs der Rollkurven“, Leipziger Berichte 1929.

Um eine äquiforme Epizykloide im Raum analytisch zu erfassen, muß man die Gleichung (7) verwirklichen. Dazu ist vor allem die Herstellung der Transformationen $T_{e_1}^{e_0}$ und $T_{e_0}^{e_2}$ erforderlich, wobei $T_{e_1}^{e_0}$ nichts anderes als die Umkehrung von $T_{e_0}^{e_1}$ bedeutet. Nun liefern uns für eine beliebige durch e_0 gelegte Bahnkurve $\mathfrak{K}$ (es gibt deren ∞^2, entsprechend den Wertsystemen α, β) die Gleichungen (5′) gerade $T_{e_0}^{e}$, von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ zu X, Y, Z führend, aber geschrieben in den gestrichenen Koordinaten. Die inverse Transformation $T_{e}^{e_0}$ wird dadurch gewonnen, daß man in (5′) $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und X, Y, Z miteinander vertauscht und zugleich s in $-s$ verwandelt. So haben wir also alle Hilfsmittel in der Hand, um unsere Aufgabe zu lösen. Man muß, um die Gleichung (7) zu verwirklichen, folgende Transformationen zusammensetzen:

$$(8)\quad \begin{cases} \beta_1 \mathfrak{x} + \mathfrak{z} - \beta_1 \alpha_1^{-1} = (\beta_1 X_0 + Z_0 - \beta_1 \alpha_1^{-1})\, e^{\alpha_1 s}, \\ \gamma_1 \mathfrak{y} - \gamma_1 (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)^{-1} = \{\gamma_1 Y_0 - \gamma_1 (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)^{-1}\}\, e^{\alpha_1 s} \cos \gamma_1 s \\ \qquad + \{\beta_1 Z_0 - X_0 + \alpha_1 (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)^{-1}\}\, e^{\alpha_1 s} \sin \gamma_1 s, \\ \beta_1 \mathfrak{z} - \mathfrak{x} + \alpha_1 (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)^{-1} = -\{\gamma_1 Y_0 - \gamma_1 (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)^{-1}\}\, e^{\alpha_1 s} \sin \gamma_1 s \\ \qquad + \{\beta_1 Z_0 - X_0 + \alpha_1 (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)^{-1}\}\, e^{\alpha_1 s} \cos \gamma_1 s \end{cases}$$

und

$$(9)\quad \begin{cases} \beta_2 X + Z - \beta_2 \alpha_2^{-1} = (\beta_2 \mathfrak{x} + \mathfrak{z} - \beta_2 \alpha_2^{-1})\, e^{-\alpha_2 s}, \\ \gamma_2 Y - \gamma_2 (\alpha_2^2 + \gamma_2^2)^{-1} = \{\gamma_2 \mathfrak{y} - \gamma_2 (\alpha_2^2 + \gamma_2^2)^{-1}\}\, e^{-\alpha_2 s} \cos \gamma_2 s \\ \qquad - \{\beta_2 \mathfrak{z} - \mathfrak{x} + \alpha_2 (\alpha_2^2 + \gamma_2^2)^{-1}\}\, e^{-\alpha_2 s} \sin \gamma_2 s, \\ \beta_2 Z - X + \alpha_2 (\alpha_2^2 + \gamma_2^2)^{-1} = \{\gamma_2 \mathfrak{y} - \gamma_2 (\alpha_2^2 + \gamma_2^2)^{-1}\}\, e^{-\alpha_2 s} \sin \gamma_2 s \\ \qquad + \{\beta_2 \mathfrak{z} - \mathfrak{x} + \alpha_2 (\alpha_2^2 + \gamma_2^2)^{-1}\}\, e^{-\alpha_2 s} \cos \gamma_2 s. \end{cases}$$

Die Gleichungen (8) geben, nach $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ aufgelöst,

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = (X_0, Y_0, Z_0)\, T_{e_1}^{e_0},$$

ebenso die Gleichungen (9), nach X, Y, Z aufgelöst,

$$(X, Y, Z) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})\, T_{e_0}^{e_2},$$

so daß schließlich

$$(X, Y, Z) = (X_0, Y_0, Z_0)\, T_{e_1}^{e_2}$$

wird, womit die Beziehung (7) verwirklicht ist.

Um nun die Rollkurve (7) in einfacher Form analytisch darzustellen, wollen wir statt X, Y, Z die Größen

$$\begin{aligned} &\beta_2 X + Z - \beta_2 \alpha_2^{-1} = X', \\ &\gamma_2 Y - \gamma_2 (\alpha_2^2 + \gamma_2^2)^{-1} = Y', \\ &\beta_2 Z - X + \alpha_2 (\alpha_2^2 + \gamma_2^2)^{-1} = Z' \end{aligned}$$

einführen, was eine äquiforme Transformation bedeutet (Verlegung des rechtwinkligen Achsensystems und Abänderung der Längeneinheit). Ferner bedienen wir uns der Abkürzungen

$$\beta_1 X_0 + Z_0 - \beta_1 \alpha_1^{-1} = X_0',$$
$$\gamma_1 Y_0 - \gamma_1 (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)^{-1} = Y_0',$$
$$\beta_1 Z_0 - X_0 + \alpha_1 (\alpha_1^2 + \gamma_1^2)^{-1} = Z_0'.$$

Dann läßt sich die Elimination der Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ aus den Gleichungen (8) und (9) leicht durchführen, und man erhält auf diese Weise:

$$\begin{aligned}
X' &= \{\alpha_1^{-1}(\alpha_1^2+\gamma_1^2)^{-1}((\alpha_1^2+\beta_1^2)\beta_2+\beta_1) - \beta_2\alpha_2^{-1}\} e^{-\alpha_2 s} \\
&\quad + \{(\beta_1\beta_2+1) X_0' + (\beta_2-\beta_1)(Y_0' \sin\gamma_1 s - Z_0' \cos\gamma_1 s)\} \gamma_1^{-2} e^{(\alpha_1-\alpha_2)s}, \\
Y' &= \{\gamma_2(\alpha_1^2+\gamma_1^2)^{-1} - \gamma_2(\alpha_2^2+\gamma_2^2)^{-1}\} e^{-\alpha_2 s}\cos\gamma_2 s \\
&\quad - \{\alpha_1^{-1}(\alpha_1^2+\gamma_1^2)^{-1}(\beta_1\beta_2+1) + \alpha_2(\alpha_2^2+\gamma_2^2)^{-1} - \alpha_1^{-1}\} e^{-\alpha_2 s}\sin\gamma_2 s \\
&\quad + \{Y_0'\cos\gamma_1 s + Z_0'\sin\gamma_1 s\}\gamma_2\gamma_1^{-1} e^{(\alpha_1-\alpha_2)s}\cos\gamma_2 s \\
&\quad - \{(\beta_2-\beta_1) X_0' - (\beta_1\beta_2+1)(Y_0'\sin\gamma_1 s - Z_0'\cos\gamma_1 s)\}\gamma_1^{-2} e^{(\alpha_1-\alpha_2)s}\sin\gamma_2 s, \\
Z' &= \{\gamma_2(\alpha_1^2+\gamma_1^2)^{-1} - \gamma_2(\alpha_2^2+\gamma_2^2)^{-1}\} e^{-\alpha_2 s}\sin\gamma_2 s \\
&\quad + \{\alpha_1^{-1}(\alpha_1^2+\gamma_1^2)^{-1}(\beta_1\beta_2+1) + \alpha_2(\alpha_2^2+\gamma_2^2)^{-1} - \alpha_1^{-1}\} e^{-\alpha_2 s}\cos\gamma_2 s \\
&\quad + \{Y_0'\cos\gamma_1 s + Z_0'\sin\gamma_1 s\}\gamma_2\gamma_1^{-1} e^{(\alpha_1-\alpha_2)s}\sin\gamma_2 s \\
&\quad + \{(\beta_2-\beta_1) X_0' - (\beta_1\beta_2+1)(Y_0'\sin\gamma_1 s - Z_0'\cos\gamma_1 s)\}\gamma_1^{-2} e^{(\alpha_1-\alpha_2)s}\cos\gamma_2 s.
\end{aligned}$$

Das ist die Parameterdarstellung einer äquiformen Epizykloide. Um eine Anwendung dieser Formeln zu geben, wollen wir eine zylindrokonische Schraubenlinie auf einer gemeinen Schraubenlinie äquiform rollen lassen und als beschreibenden Punkt P_0 den Pol der zylindrokonischen Schraubenlinie, also die Spitze des sie aufnehmenden Rotationskegels, wählen. Dann müssen wir in unsern Formeln α_2 zu Null werden lassen und X_0', Y_0', Z_0' gleich Null setzen. Will man α_2 gegen Null konvergieren lassen, so muß man statt X' eine neue Koordinate X'' benutzen, die sich von jener um $\beta_2\alpha_2^{-1}$ unterscheidet. Man kann auch noch einen andern konstanten Wert hinzufügen und erhält dann als Endergebnis:

$$\begin{aligned}
X'' &= \beta_2 s, \\
Y' &= \{\gamma_2(\alpha_1^2+\gamma_1^2)^{-1} - \gamma_2^{-1}\}\cos\gamma_2 s - \{\alpha_1^{-1}(\alpha_1^2+\gamma_1^2)^{-1}(\beta_1\beta_2+1) - \alpha_1^{-1}\}\sin\gamma_2 s, \\
Z' &= \{\gamma_2(\alpha_1^2+\gamma_1^2)^{-1} - \gamma_2^{-1}\}\sin\gamma_2 s + \{\alpha_1^{-1}(\alpha_1^2+\gamma_1^2)^{-1}(\beta_1\beta_2+1) - \alpha_1^{-1}\}\cos\gamma_2 s.
\end{aligned}$$

Das ist eine gemeine Schraubenlinie, deren Achse parallel zur Achse von $\mathfrak{R}_2$ läuft. Bei äquiformem Rollen einer zylindrokonischen auf einer gemeinen Schraubenlinie beschreibt also der Pol der rollenden Schraubenlinie eine gemeine Schraubenlinie.

§ 3.

Rollkurven in der euklidischen Raumgeometrie.

Will man für die euklidische Bewegungsgruppe des Raumes eine ähnliche Rollkurventheorie entwickeln, wie wir sie oben für die äquiforme Gruppe durchgeführt haben, so ist es nicht mehr möglich, mit Kurvenelementen zu arbeiten, weil es kein Kurvenelement von irgendeiner Ordnung gibt, das man als geometrischen Parameter im Sinne Cartans verwenden könnte. Es ist mit andern Worten unmöglich, die Transformationen der Gruppe durch ihre Einwirkung auf ein Anfangselement eben jener Ordnung zu kennzeichnen.

Wenn man aber anstatt Kurven Flächenstreifen betrachtet, so ist die Schwierigkeit sofort behoben. Der Flächenstreifen baut sich aus ∞^1 gestrichelten Flächenelementen auf, und das *gestrichelte Flächenelement* ist eine Figur, die man bei der Bewegungsgruppe als geometrischen Parameter benutzen kann. Es besteht aus einem Punkt P, einer durch den Punkt hindurchgehenden Geraden g und einer durch die Gerade hindurchgehenden Ebene ε, wobei man sich nach dem Vorgange Lies nur den Teil der Figur vorstellen möge, der in nächster Nähe des Punktes P liegt. Um ein gestricheltes Flächenelement E in ein anderes E' durch Bewegung überzuführen, kann man so vorgehen, daß man zuerst durch eine Translation den Punkt des ersten in den des zweiten übergehen läßt, dann durch eine Drehung um den Punkt die Gerade des ersten in die des zweiten und schließlich durch eine Drehung um die Gerade die Ebene des ersten in die des zweiten. Weicht E' nicht zu stark von E ab, so ist in der Umgebung der Identität nur *eine* Bewegung vorhanden, die E in E' verwandelt. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{B}_E^{E'}$.

Gehört das gestrichelte Flächenelement $E(P, g, \varepsilon)$ einem Flächenstreifen an, so wird g die Tangente der Kurve (P) im Punkte P sein, also die Verbindung unendlich benachbarter Punkte P. Eine gegebene Kurve (P) ist Trägerin unendlich vieler Flächenstreifen, wenn man keine weitere Bedingung einführt. Verlangt man aber, daß g immer der Schnitt unendlich benachbarter ε sein soll, so bilden die Ebenen ε eine abwickelbare Fläche mit der Rückkehrkante (P), und ε ist dann stets die Schmiegungsebene von (P) an der Stelle P. Zu einer Kurve, die keine Gerade ist, gehört auf diese Weise immer ein völlig bestimmter Flächenstreifen, der am besten als *Schmiegungsstreifen* zu bezeichnen wäre.

Man denke sich nun zwei Schmiegungsstreifen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, die beide das gestrichelte Flächenelement E_0 enthalten. Die Punktörter $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ dieser Streifen berühren sich also an der Stelle, wo E_0 liegt, und haben

dort eine gemeinsame Schmiegungsebene. Man stelle sich jetzt vor, daß auf $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ von E_0 aus nach derselben Seite hin der Bogen s abgetragen werde. Dann gelangt man zu zwei Stellen auf $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, an denen sich die gestrichelten Flächenelemente E_1 und E_2 befinden. Solange s klein genug ist und $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ die erforderlichen Stetigkeitseigenschaften besitzen, gibt es dann in der Umgebung der Identität zwei eindeutig bestimmte Bewegungen $\mathfrak{B}_{E_1}^{E_1}$ und $\mathfrak{B}_{E_0}^{E_2}$, die E_0 in E_1 oder E_2 überführen. Wendet man nun auf einen beliebig gewählten Punkt P_0 die den verschiedenen s-Werten entsprechende Bewegung $\mathfrak{B}_{E_1}^{E_2}$ an, die als Produkt von $\mathfrak{B}_{E_1}^{E_0}$ und $\mathfrak{B}_{E_0}^{E_2}$ eindeutig festgelegt ist, so entsteht bei variierendem s die Kurve

$$P = (P_0)\,\mathfrak{B}_{E_1}^{E_0}\,\mathfrak{B}_{E_0}^{E_2}. \tag{10}$$

Sie ist die *Rollkurve*, die der Punkt P_0 beschreibt, wenn er mit $\mathfrak{S}_1$ fest verbunden bleibt und $\mathfrak{S}_1$ auf $\mathfrak{S}_2$ rollt. Da $(P)\,\mathfrak{B}_{E_2}^{E_0} = (P_0)\,\mathfrak{B}_{E_1}^{E_1}$ ist, so kann man auch sagen, daß P in bezug auf E_2 dieselben Belativkoordinaten hat, wie P_0 in bezug auf E_1. Sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ Bahnkurven infinitesimaler Bewegungen, also gemeine Schraubenlinien, so ergibt sich wieder der epizykloidische Sonderfall. Ihn werden wir nachher eingehender erörtern.

Das geeignete Instrument zur Behandlung dieser räumlichen Rollkurven ist das begleitende Dreibein (Tangente $\mathfrak{t}$, Hauptnormale $\mathfrak{h}$, Binormale $\mathfrak{b}$, gedacht als Einheitsvektoren). Wenn durch E_0 irgendein Schmiegungsstreifen $\mathfrak{S}$ gelegt ist, so gehört zu dem gestrichelten Flächenelement E, das sich auf $\mathfrak{S}$ an der Stelle s befindet (s der Bogen $E_0 E$) ein Dreibein $\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}$, das stetig von s abhängt[7]) und zu $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}_0$ wird, wenn s gegen Null geht. $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}_0$ ist ein an E_0 sich anschließendes Dreibein, d. h. $\mathfrak{t}_0$ fällt auf die Gerade und $\mathfrak{h}_0$ in die Ebene von E_0. Sobald ein solches Dreibein $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}_0$ vorliegt, ist E_0 *orientiert*. Infolge der Stetigkeit sind dann auch die Elemente E auf dem Schmiegungsstreifen $\mathfrak{S}$ orientiert, eben durch das stetig sich ändernde Dreibein $\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}$.

Nun seien u, v, w die Koordinaten eines festen Punktes in bezug auf die Achsen $\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}$ und X, Y, Z die Koordinaten desselben Punktes in bezug auf $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}_0$. Dann hängen diese beiden Koordinatentripel in folgender Weise zusammen:

$$(u, v, w) = (X, Y, Z)\,\mathfrak{B}_E^{E_0}. \tag{11}$$

Hierdurch hat man ein Mittel in der Hand, um sich die Transformation $\mathfrak{B}_E^{E_0}$ zu verschaffen, die zur Verwirklichung der Formel (10) gebraucht

[7]) $\mathfrak{S}$ soll alle erforderlichen Stetigkeitseigenschaften besitzen, damit auch die weiter folgenden Betrachtungen ihre Gültigkeit haben.

wird. u, v, w genügen, als Funktionen von s betrachtet, gewissen Differentialgleichungen, den Cesàroschen Unbeweglichkeitsbedingungen. Sie werden aus den Frenetschen Formeln

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \varkappa \mathfrak{h}, \quad \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = \tau \mathfrak{h}, \quad \frac{d\mathfrak{h}}{ds} = -\varkappa \mathfrak{t} - \tau \mathfrak{b}$$

gewonnen und lauten

$$(12) \qquad \begin{cases} \frac{du}{ds} = -1 + \varkappa v, \\ \frac{dv}{ds} = -\varkappa u \qquad - \tau w, \\ \frac{dw}{ds} = \qquad \tau v. \end{cases}$$

Sind $\varkappa$ und τ (Krümmung und Torsion von $\mathfrak{S}$) als Funktionen von s gegeben und integriert man das System (12) von den Anfangswerten X, Y, Z aus, so ergibt sich die Beziehung (11), und man findet $\mathfrak{B}_E^{E_0}$. Wendet man dieses Verfahren auf die Schmiegungsstreifen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ an, so erhält man $\mathfrak{B}_{E_1}^{E_0}$ und $\mathfrak{B}_{E_2}^{E_0}$ und kann die Formel (10) verwirklichen.

Wir wollen uns auf den epizykloidischen Fall beschränken, d. h. *$\varkappa$ und τ konstant* annehmen. Unter dieser Voraussetzung folgt aus (12)

$$\frac{d(\tau u - \varkappa w)}{ds} = -\tau,$$

$$\frac{dv}{ds} = -(\varkappa u + \tau w),$$

$$\frac{d(\varkappa u + \tau w)}{ds} = -\varkappa + (\varkappa^2 + \tau^2) v.$$

Nun ergibt sich unmittelbar

$$(13) \qquad \begin{cases} \frac{\tau u - \varkappa w}{\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}} = \frac{\tau X - \varkappa Z}{\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}} - \frac{\tau s}{\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}}, \\ v - \frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2} = \left(Y - \frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}\right) \cos\left(s\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\right) - \frac{\varkappa X + \tau Z}{\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}} \sin\left(s\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\right), \\ \frac{\varkappa u + \tau w}{\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}} = \left(Y - \frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}\right) \sin\left(s\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\right) + \frac{\varkappa X + \tau Z}{\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}} \cos\left(s\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\right). \end{cases}$$

Das ist die Beziehung (11) in ausführlicher Schreibung. Man kann hieraus die Relativkoordinaten u, v, w des Punktes (X, Y, Z) in bezug auf E entnehmen.

Kehren wir nun zu den beiden Schmiegungsstreifen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zurück, die jetzt wegen der Konstanz von Krümmung und Torsion *Schraubenstreifen* sind. Die Relativkoordinaten u, v, w des festen Punktes $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ in bezug auf E_1 werden nach (13) durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\tau_1 u - \varkappa_1 w}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}} = \dfrac{\tau_1 X_0 - \varkappa_1 Z_0}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}} - \dfrac{\tau_1 s}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}}, \\ v - \dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+\tau_1^2} = \left(Y_0 - \dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+\tau_1^2}\right)\cos(s\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}) - \dfrac{\varkappa_1 X_0 + \tau_1 Z_0}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}}\sin(s\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}), \\ \dfrac{\varkappa_1 u + \tau_1 w}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}} = \left(Y_0 - \dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+\tau_1^2}\right)\sin(s\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}) + \dfrac{\varkappa_1 X_0 + \tau_1 Z_0}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}}\cos(s\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}), \end{cases}$$

Ähnliche Gleichungen gelten für die Relativkoordinaten des Rollkurvenpunktes $P(X, Y, Z)$ in bezug auf E_2, die, wie wir wissen, dieselben Werte u, v, w haben, wie diejenigen des festen Punktes P_0 in bezug auf E_1. Wir wollen aber dieses zweite Gleichungssystem so schreiben, daß links die Größen X, Y, Z stehen, während u, v, w und s die rechte Seite einnehmen.

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\tau_2 X - \varkappa_2 Z}{\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}} = \dfrac{\tau_2 u - \varkappa_2 w}{\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}} + \dfrac{\tau_2 s}{\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}}, \\ Y - \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_2^2+\tau_2^2} = \left(v - \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_2^2+\tau_2^2}\right)\cos(s\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}) + \dfrac{\varkappa_2 u + \tau_2 w}{\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}}\sin(s\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}), \\ \dfrac{\varkappa_2 X + \tau_2 Z}{\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}} = -\left(v - \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_2^2+\tau_2^2}\right)\sin(s\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}) + \dfrac{\varkappa_2 u + \tau_2 w}{\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}}\cos(s\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}). \end{cases}$$

Um die analytische Darstellung der hier betrachteten epizykloidischen Rollkurve zu finden, muß man jetzt aus (14) und (15) die Größen u, v, w eliminieren. Wir setzen

$$\frac{\tau_2 X - \varkappa_2 Z}{\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}} = X',$$

$$Y - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_2^2+\tau_2^2} = Y',$$

$$\frac{\varkappa_2 X + \tau_2 Z}{\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}} = Z',$$

was auf eine Verlegung des Achsensystems $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}_0$ hinauskommt, und benutzen außerdem die Abkürzungen

$$\frac{\tau_1 X_0 - \varkappa_1 Z_0}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}} = X_0',$$

$$Y_0 - \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+\tau_1^2} = Y_0',$$

$$\frac{\varkappa_1 X_0 + \tau_1 Z_0}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}} = Z_0'.$$

Dann läßt sich das Eliminationsergebnis folgendermaßen schreiben, wobei wir der Einfachheit wegen P_0 mit dem Punkte von E_0 zusammenfallen

lassen, also $X_0' = 0$, $Y_0' = -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+\tau_1^2}$, $Z_0' = 0$ setzen:

$$X' = \frac{\varkappa_1(\varkappa_1\tau_2 - \varkappa_2\tau_1)}{(\varkappa_1^2+\tau_1^2)\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}}\left\{s - \frac{\sin(s\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2})}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}}\right\},$$

$$Y' = \left\{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+\tau_1^2}(1-\cos(s\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2})) - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_2^2+\tau_2^2}\right\}\cos(s\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2})$$
$$+\left\{\frac{\tau_1(\varkappa_1\tau_2-\varkappa_2\tau_1)s}{(\varkappa_1^2+\tau_1^2)\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}} - \frac{\varkappa_1(\varkappa_1\varkappa_2+\tau_1\tau_2)}{(\varkappa_1^2+\tau_1^2)\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}}\frac{\sin(s\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2})}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}}\right\}\sin(s\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}),$$

$$Z' = -\left\{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1^2+\tau_1^2}(1-\cos(s\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2})) - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_2^2+\tau_2^2}\right\}\sin(s\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2})$$
$$+\left\{\frac{\tau_1(\varkappa_1\tau_2-\varkappa_2\tau_1)s}{(\varkappa_1^2+\tau_1^2)\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}} - \frac{\varkappa_1(\varkappa_1\varkappa_2+\tau_1\tau_2)}{(\varkappa_1^2+\tau_1^2)\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}}\frac{\sin(s\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2})}{\sqrt{\varkappa_1^2+\tau_1^2}}\right\}\cos(s\sqrt{\varkappa_2^2+\tau_2^2}).$$

Das ist in Parameterdarstellung diejenige Kurve, die beim Rollen eines Schraubenstreifens auf einem andern durch den anfänglichen Berührungspunkt beider Streifen beschrieben wird, nach meiner Auffassung *das räumliche Analogon einer Epizykloide.*

(Eingegangen am 28. Mai 1929.)

Über die neue Winogradoffsche Behandlung des Waringschen Problems.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Den folgenden Satz haben die Herren Hardy und Littlewood[1]) im Spezialfall $\varphi(h) = h^k$ und ich[2]) allgemein bewiesen:

Es sei

$$k > 2 \text{ ganz};$$

$$\varphi(h) = \alpha h^k + \alpha_1 h^{k-1} + \ldots + \alpha_k$$

ein ganzzahliges Polynom mit

$$\alpha > 0;$$

$$N > 0 \text{ ganz};$$

$$r(N) = r_s(N) = r_{s,\varphi}(N)$$

die Lösungszahl der diophantischen Gleichung

$$N = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(h_\nu), \qquad h_\nu > 0;$$

$$S_{a,q} = \sum_{\mu=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q} \varphi(\mu)} = S_{a,q,\varphi}$$

für $q > 0$, $(a, q) = 1$.

[1]) *Some problems of 'Partitio Numerorum'; I: A new solution of Waring's Problem* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1920, S. 33–54]; *Some problems of „Partitio numerorum": II. Proof that every large number is the sum of at most* 21 *biquadrates* [Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 14–27]. Hieraus folgt bekanntlich als spezielles Korollar der Waring-Hilbertsche Satz.

[2]) *Zum Waringschen Problem* [Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 219–247] für $s \geqq k 2^{k-1} + 1$ (was den Waring-Kamkeschen Satz als spezielles Korollar lieferte); *Zum Waringschen Problem, zweite Abhandlung* [Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 149–150] in der Fassung $s \geqq (k-2) 2^{k-1} + 5$ des Textes.

Dann ist für $s \geqq (k-2)\,2^{k-1}+5$,

$$\mathfrak{S}_N = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left(\frac{S_{a,q}}{q}\right)^s e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} = \mathfrak{S}_{N,s,\varphi}$$

gesetzt,

$$r(N) = \alpha^{-\frac{s}{k}} \frac{\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1} < C N^{\frac{s}{k}-1-B}, \tag{1}$$

wo C *nur von* φ *und* s, $B>0$ *nur von* k *abhängt*[3]).

Kürzlich[4]) erschienen zwei bahnbrechende Abhandlungen von Herrn Winogradoff[5]) über diesen Gegenstand. Durch wesentliche Vereinfachungen der Hardy-Littlewoodschen Methode (keine Potenzreihen und keine komplexe Funktionentheorie mehr) beweist Herr Winogradoff in der ersten

[3]) Die damalige Einschränkung, daß $\varphi(h)$ für $h \geqq 0$ nicht negativ ist und wächst, sowie der Umstand, daß $h_\nu \geqq 0$ statt $h_\nu > 0$ bei der Definition von $r(N)$ stand, sind unerheblich (vgl. die entsprechende Bemerkung auf S. 221, Anm. [7]), meiner ersten Abhandlung). Denn:

1. Bei passendem ganzem $l>0$ hat $\varphi_1(h)=\varphi(h+l)$ doch jene Eigenschaft, so daß wegen der Beschränktheit von

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^{\varphi(h)} - \sum_{h=0}^{\infty} x^{\varphi_1(h)} = \sum_{h=0}^{l-1} x^{\varphi(h)} \quad \text{für} \quad \frac{1}{2} \leqq |x| < 1$$

die Hilfssätze 9 und 11 bestehen bleiben; ferner ist (88) auch ohne jene Einschränkung klar.

2. Anwendung auf $\varphi_1(h)=\varphi(h+1)$ statt $\varphi(h)$ liefert $h_\nu>0$ statt $h_\nu \geqq 0$; hierbei ist zu beachten, daß $e^{2\pi i \frac{a}{q}\varphi(\mu)}$ die Periode q hat, also

$$\sum_{\mu=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q}\varphi_1(\mu)} = \sum_{\mu=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q}\varphi(\mu+1)} = \sum_{\mu=2}^{q+1} e^{2\pi i \frac{a}{q}\varphi(\mu)} = \sum_{\mu=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q}\varphi(\mu)}$$

ist, folglich $S_{a,q}$ und damit $\mathfrak{S}_N$ in der Behauptung invariant bleiben.

[4]) Übrigens vor Abfassung meiner zweiten in Anm. [2]) genannten Abhandlung; die Winogradoffschen Entdeckungen regten mich gerade zu erneutem Studium meiner alten Abhandlung an.

[5]) *О ТЕОРЕМЕ ВАРИНГА* und *О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЛА ЦЕЛЫМ МНОГОЧЛЕНОМ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ* in ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК, VII СЕРИЯ, ОТДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, 1928, S. 393—400 bzw. S. 401—414.

Arbeit[6]) den genannten Satz für $\varphi(h) = h^k$; in der zweiten beweist er ihn für allgemeines $\varphi(h)$, aber nur für $s \geqq k\,2^{k-1}+1$ (allerdings unter noch allgemeineren Voraussetzungen[7])).

Es ist mir nun gelungen, die Winogradoffsche Beweismethode noch an drei Stellen zu vereinfachen:

1. Statt der vier Intervallklassen von Herrn Winogradoff benutze ich nur zweieinhalb (in der folgenden Darstellung sind es natürlich drei).

2. Bei meiner dritten Klasse (der Hälfte seiner vierten Klasse) vermeide ich seine Einführung der Zahlen l; dies war für meine Lektüre die einzige schwierige Stelle des Winogradoffschen Beweises.

3. Ich arbeite mit einem festen N, während Herr Winogradoff gleichmäßig auf einer N-Strecke arbeitet.

Dies alles werde ich, alsbald für allgemeines $\varphi(h)$ und $s \geqq (k-2)\,2^{k-1}+5$, in der Folge auseinandersetzen. Aus der Waringliteratur setze ich nichts als bekannt voraus; nur wegen des Weylschen Hilfssatzes über diophantische Approximationen und einer anknüpfenden Rechnung verweise ich auf meine *Vorlesungen*, wo jene beiden Stellen unabhängig vom übrigen lesbar sind.

Obgleich ich genau den Winogradoffschen Weg mit drei Abkürzungen gehe, ist meine Darstellung länger als dort; dies liegt nur daran, daß ich es dem Leser besonders leicht machen will, daher manche Zwischenrechnungen ausführe und das Ganze in recht viele Hilfssätze zerlege.

---

[6]) Aber seinen Schlußworten *Отсюда же вытекают все следствия, полученные Hardy* (*und daraus ergeben sich alle Hardyschen Resultate*) [S. 400] kann ich nur teilweise zustimmen. Um (für $\varphi(h) = h^k$) aus (1), dem „ersten Hardy-Littlewoodschen Satz“ 279 meiner *Vorlesungen über Zahlentheorie* [Bd. 1 (1927)], zu schließen, daß $r_s(N)$ bei jedem $s \geqq (k-2)\,2^{k-1}+5$ für alle großen N positiv ist („zweiter Hardy-Littlewoodscher Satz“ 325), braucht man, daß $\mathfrak{S}_N$ oberhalb einer positiven, von N freien Schranke liegt ($\mathfrak{S}_N > N^{-B'}$ mit $B' < B$ würde genügen, ist aber nicht billiger zu haben), und die Darstellung der hierzu erforderlichen Theorie der *singular series* nach Hardy und Littlewood in meinen *Vorlesungen* [6. Teil, Kap. 2] ist über 20 Seiten lang, von deren Inhalt das Meiste für den vorliegenden Zweck gebraucht wird. Mit jenen arithmetischen Untersuchungen liefert (1) allerdings z. B. ($k=4$), daß alle großen Zahlen in 21 Biquadrate zerlegbar sind. Und all das reicht noch lange nicht, um z. B. den (aus den analytischen Quellen zu schöpfenden) „dritten und vierten Hardy-Littlewoodschen Satz“ (Satz 346 bzw. 347 und 350 meiner *Vorlesungen*) zu beweisen, nach denen z. B. ($k=4$) fast alle Zahlen in 15 Biquadrate und alle großen Zahlen in 19 Biquadrate zerlegbar sind.

[7]) Statt $\sum_{\nu=1}^{s} \varphi(h_\nu)$ wird $a_1 h_1^k + \ldots + a_s h_s^k + \Phi(h_1, \ldots, h_s)$ zugrunde gelegt, wo $a_1 > 0, \ldots, a_s > 0$ ganz sind und Φ ein beliebiges ganzzahliges Polynom $(k-1)$-ten Grades ist. Das $\alpha^{-\frac{s}{k}}$ in (1) wird $(a_1 \cdots a_s)^{-\frac{1}{k}}$.

Der nur an $\varphi(h) = h^k$ interessierte Leser wird selbst merken, was in diesem Spezialfall kürzer ist; es ist aber so wenig, daß ich den Beweis nicht erst im Spezialfall aufgeschrieben habe.

Wie groß $B(k)$ in (1) gewählt werden kann, ist für die Anwendungen gleichgültig. Da aber einmal Herr Winogradoff den Beweis bis zur numerischen Angabe eines B, nämlich $\frac{1}{k\,2^k}$, durchgeführt hat, zeige ich in § 1 des Anhangs (wobei ich auf meine erste Vereinfachung verzichten muß), durch welche Abänderung des Vorangehenden dies B herauskommt.

Meine dritte Vereinfachung, die in der Einführung der Sätze 4 und 11 besteht, verdanke ich einer Stelle einer hochbedeutenden Arbeit von Herrn Walfisz [8]). Ich zeige in § 2 des Anhangs, wie die betreffende Auswertung eines Integrals auch ohne jene beiden Sätze und ohne die Summation über N am Schluß des Hauptbeweises verhältnismäßig einfach geht; aber ich ziehe den mehr arithmetischen Weg des Textes vor.

§ 1.

Bezeichnungen.

Es sei durchweg

$$k > 2 \text{ ganz};$$
$$\sigma = 2^{1-k};$$
$$s \geqq (k-2)\,2^{k-1} + 5 \text{ ganz},$$

also

$$s \begin{cases} \geqq 9 & \text{für } k = 3, \\ > 2^k > 3k & \text{für } k > 3, \end{cases}$$

d. h. stets

$$s \geqq 3k,$$

$$\sigma s \geqq k - 2 + \frac{5}{2^{k-1}} \begin{cases} = \frac{9}{4} & \text{für } k = 3, \\ = \frac{21}{8} & \text{für } k = 4, \\ > 3 & \text{für } k > 4, \end{cases}$$

d. h. stets

$$\sigma s \geqq \frac{9}{4},$$
$$\sigma(s-1) = \sigma s - \sigma \geqq 2;$$
$$\alpha > 0;$$
$$\beta \geqq 0;$$
$$\varphi(x) = \alpha x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k$$

[8]) *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden* [Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 300–307], S. 302–303.

ein ganzzahliges Polynom mit

$$|\alpha_\nu| \leqq \beta \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq k;$$
$$\varepsilon > 0$$

und alle ε enthaltenden Behauptungen und Formeln für jedes $\varepsilon > 0$ gemeint, wenn nichts anderes gesagt wird;

$$\text{alle} \left\{ \begin{matrix} W \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} \right\} > 0 \text{ und höchstens abhängig von } \left\{ \begin{matrix} \text{nichts}, \\ k, \\ k, s, \alpha, \beta, \\ k, \alpha, \varepsilon, \\ k, s, \alpha, \beta, \varepsilon; \end{matrix} \right.$$

$$P \geqq 1;$$

z reell;

$$S = \sum_{x=1}^{[P]} e^{2\pi i z \varphi(x)} = S(\varphi, P, z);$$

$$q > 0;$$

$$(a, q) = 1;$$

$$S_{a,q} = \sum_{\mu=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q} \varphi(\mu)} \qquad S_{a,q,\varphi} = S\left(\varphi, q, \frac{a}{q}\right);$$

$N > 0$ ganz;

$$A_q = q^{-s} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqq a \leqq q}} S_{a,q}^s e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} = A_q(\varphi, q, s, N);$$

$$J = \int_0^P e^{2\pi i y \alpha u^k} du = J(k, \alpha, y, P);$$

$$r(N) = r_{s,\varphi}(N)$$

die Lösungszahl der diophantischen Gleichung

$$N = \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(h_\nu), \quad h_\nu > 0. \tag{2}$$

Ich behalte mir die Wahl zweier nur von k abhängiger positiver Zahlen $\delta = \delta(k)$, $\vartheta = \vartheta(k)$ mit

$$\delta + \vartheta < 1$$

und eines nur von k, s, α, β abhängigen $c > 0$ vor;

$$T = \int_{-P^{-k+\delta}}^{P^{-k+\vartheta}} e^{-2\pi i c P^k y} J^s dy = T(k, s, \alpha, \beta, P);$$

$$K = \alpha^{-\frac{s}{k}} \frac{\Gamma^s\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} = K(k, s, \alpha).$$

§ 2.

Hilfssätze.

Satz 1.

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i c v} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha v w^k} dw \right)^s dv = L(k, s, \alpha, \beta)$$

konvergiert, und es ist

$$|T - LP^{s-k}| < C_1 P^{s-k-2\delta}, \tag{3}$$

also

$$|T| < C_2 P^{s-k}. \tag{4}$$

Beweis.

$$\int_0^{\infty} e^{2\pi i \alpha t^k} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i \alpha k t^{k-1}} \frac{d}{dt} e^{2\pi i \alpha t^k} dt$$

konvergiert nach dem zweiten Mittelwertsatz. Für $v \gtrless 0$ ist also

$$\left| \int_0^1 e^{2\pi i \alpha v w^k} dw \right| = \left| \int_0^1 e^{2\pi i \alpha |v| w^k} dw \right| = |v|^{-\frac{1}{k}} \left| \int_0^{|v|^{\frac{1}{k}}} e^{2\pi i \alpha t^k} dt \right| < C_3 |v|^{-\frac{1}{k}},$$

für reelles v mit $|v| \geqq 1$ also

$$\left| e^{-2\pi i c v} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha v w^k} dw \right)^s \right| < C_4 |v|^{-\frac{s}{k}} \leqq C_4 |v|^{-3}.$$

Hieraus folgt die Konvergenz von L und ferner, da $(y = P^{-k} v,\ u = Pw)$

$$T = P^{s-k} \int_{-P^{\delta}}^{P^{\delta}} e^{-2\pi i c v} \left(\int_0^1 e^{2\pi i \alpha v w^k} dw \right)^s dv$$

ist,

$$|T - LP^{s-k}| \leqq 2P^{s-k} \int_{P^{\delta}}^{\infty} C_4 v^{-3} dv < C_1 P^{s-k-2\delta}.$$

Satz 2. *Bei* $Q \to \infty$ *ist*

$$\sum_{1 \leqq N \leqq Q} r(N) \sim \frac{k}{s} K Q^{\frac{s}{k}}.$$

Beweis. Es sei alsbald $Q \geqq 1$. Offenbar ist $\sum_{1 \leqq N \leqq Q} r(N)$ die Lösungszahl von

$$1 \leqq \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(h_\nu) \leqq Q, \quad h_\nu > 0. \tag{5}$$

Für $x \geqq 1$ ist

$$\varphi(x) \geqq \alpha x^k - \beta(x^{k-1} + \ldots + 1) > \alpha x^k - C_5 x^{k-1} > -C_6;$$

aus (5) folgt also bei jedem $\nu = 1, \ldots, s$

$$\varphi(h_\nu) < Q + (s-1) C_6 < C_7 Q,$$

$$\varphi(h_\nu) > \alpha h_\nu^k - C_5 h_\nu^{k-1} = \alpha h_\nu^k \left(1 - \frac{C_5}{\alpha} \frac{1}{h_\nu}\right).$$

Für $h_\nu \geqq \frac{2 C_5}{\alpha}$ ist also in (5)

$$\frac{\alpha}{2} h_\nu^k < \varphi(h_\nu) < C_7 Q,$$

$$h_\nu < C_8 Q^{\frac{1}{k}};$$

für $h_\nu > 0$ also

$$h_\nu < C_9 Q^{\frac{1}{k}}, \tag{6}$$

$$\alpha \sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k < \sum_{\nu=1}^{s} \varphi(h_\nu) + C_5 \sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^{k-1} < Q + C_{10} Q^{\frac{k-1}{k}}.$$

Die Lösungszahl von (5) ist also höchstens gleich der Lösungszahl von

$$\sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k \leqq \frac{Q}{\alpha} + C_{10} Q^{\frac{k-1}{k}}, \quad h_\nu > 0. \tag{7}$$

Andererseits ist für $x \geqq 1$

$$\varphi(x) \leqq \alpha x^k + \beta(x^{k-1} + \ldots + 1) < \alpha x^k + C_{11} x^{k-1}.$$

Aus

$$\sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k \leqq \frac{Q}{\alpha} - s C_{11} Q^{\frac{k-1}{k}}, \quad h_\nu > 0$$

folgt also, da zunächst

$$h_\nu < Q^{\frac{1}{k}}$$

sein muß,

$$\sum_{\nu=1}^{s} \varphi(h_\nu) < \alpha \sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k + C_{11} \sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^{k-1} \leqq Q - s C_{11} Q^{\frac{k-1}{k}} + C_{11} \sum_{\nu=1}^{s} Q^{\frac{k-1}{k}} = Q.$$

Außerdem ist

$$\sum_{\nu=1}^{s} \varphi(h_\nu) > 0, \quad \text{falls alle} \quad h_\nu > C_{12}.$$

Die Lösungszahl von (5) ist also mindestens gleich der Lösungszahl von

$$\sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k \leqq \frac{Q}{\alpha} - s C_{11} Q^{\frac{k-1}{k}}, \quad h_\nu > C_{12}. \tag{8}$$

Nun sind die Lösungszahlen von

$$\sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k \leqq R, \qquad h_\nu > 0 \quad \text{bzw.} \quad h_\nu > C_{12},$$

bei $R \to \infty$ offenbar beide

$$\sim R^{\frac{s}{k}} \int \dots \int_{\sum_{\nu=1}^{s} y_\nu^k \leqq 1,\ y_\nu \geqq 0} dy_1 \dots dy_s,$$

und dies s-fache Integral ist bekanntlich $\frac{k}{s} \frac{\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}$. Da in (7) und (8) die rechte Seite $\sim \frac{Q}{\alpha}$ bei $Q \to \infty$ ist, ist alles bewiesen.

Satz 3. *Die Lösungszahl der diophantischen Gleichung*

$$(9) \qquad \varphi(x_1) + \varphi(x_2) - \varphi(x_3) - \varphi(x_4) = 0, \quad 1 \leqq x_\nu \leqq P \quad (\nu = 1, .., 4),$$

ist

$$< E_1 P^{2+\varepsilon}.$$

Beweis. Die Anzahl der Wertepaare x_2, x_4 mit

$$\varphi(x_4) - \varphi(x_2) = 0, \qquad 1 \leqq x_4 \leqq P$$

ist $\leqq kP$, da jedem x_4 höchstens k Werte von x_2 entsprechen. Für jedes dieser Wertepaare hat

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_3) = 0, \qquad 1 \leqq x_1 \leqq P,$$

aus dem gleichen Grunde höchstens kP Lösungen. Die Lösungszahl von (9) mit der Nebenbedingung

$$\varphi(x_4) - \varphi(x_2) = 0$$

ist also $\leqq k^2 P^2$.

Für jedes $n \neq 0$ hat

$$(10) \qquad \varphi(x_1) - \varphi(x_3) = n,$$

wenn $T(m)$ die Anzahl der positiven Teiler von m bezeichnet, höchstens $2(k-1)T(|n|)$ Lösungen x_1, x_3. Denn in

$$\varphi(x+l) - \varphi(x) = l\left(\varphi'(x) + l\frac{\varphi''(x)}{2} + \dots\right)$$

ist die Klammer rechts bei festem l ein ganzzahliges Polynom in x und l vom genauen Grade $k-1$ in x; aus (10) folgt also $x_1 - x_3 \mid n$, und jedem dieser $2T(|n|)$ Werte $x_1 - x_3$ entsprechen höchstens $k-1$ Werte x_3, also höchstens $k-1$ Paare x_1, x_3.

Für $n = \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$ kommen wegen $1 \leqq x_2 \leqq P$, $1 \leqq x_1 \leqq P$ nur solche n in Betracht, für die

$$|n| \leqq 2(\alpha P^k + \beta(P^{k-1} + \ldots + 1)) < C_{13} P^k$$

ist. Aus

$$T(m) < D_1 m^{\frac{\varepsilon}{k}} \quad \text{für} \quad m \geqq 1$$

folgt also, daß die Lösungszahl von (9)

$$< k^2 P^2 + P^2 2(k-1) D_1 (C_{13} P^k)^{\frac{\varepsilon}{k}} < E_1 P^{2+\varepsilon}$$

ist.

Satz 4. *Für* $q > 1$, *ganzes* $Q > 0$, $\lambda > 0$ *ist*

$$\sum_{a=1}^{q-1} \sum_{N=1}^{Q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} N^{\lambda} | < W_1 Q^{\lambda} q \log q .$$

Beweis.

$$\left| \sum_{N=1}^{Q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} N^{\lambda} \right| \leqq Q^{\lambda} \operatorname*{Max}_{1 \leqq R \leqq Q} \left| \sum_{N=R}^{Q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} \right| \leqq \frac{Q^{\lambda}}{\sin \frac{\pi a}{q}},$$

$$\sum_{a=1}^{q-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi a}{q}} \leqq 2 \sum_{1 \leqq a \leqq \frac{q}{2}} \frac{1}{\sin \frac{\pi a}{q}} \leqq \sum_{a=1}^{q} \frac{q}{a} < W_1 q \log q .$$

Satz 5. *Für* $z = \frac{a}{q} + y$, $|y| < \frac{1}{q^2}$ *ist*

$$|S| < D_2 P^{1+\varepsilon} \operatorname{Max}^{\sigma}\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{P}, \frac{q}{P^k}\right).$$

Beweis. Wegen $|S| \leqq P$ sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $q < P^k$. Nach Satz 266 meiner *Vorlesungen* ist

$$|S| < D_3 P^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(P^{1-\sigma} + P^{1-\sigma k} \left(\sum_{r=1}^{k! |P|^{k-1}} \operatorname{Min}\left([P], \frac{1}{\{\alpha z r\}}\right) \right)^{\sigma} \right).$$

Die rechte Seite von

$$\sum_{v} \operatorname{Min} \leqq \sum_{1 \leqq w \leqq \alpha k! P^{k-1}}' \operatorname{Min}\left([P], \frac{1}{\{z w\}}\right)$$

zerfällt in höchstens $\frac{\alpha k! P^{k-1}}{q} + 1$ Teilsummen von je höchstens q konsekutiven Gliedern, und jede derselben ist nach S. 344 meiner *Vorlesungen*[9])

$$\leqq 5P + 4q \log q .$$

[9]) Bis dahin war die dort andersartige Beschränkung des q nicht benutzt.

Daher ist (wegen

$$\log q < k \log P < D_4 P^{\frac{\varepsilon}{2\sigma}})$$

$$\sum_v \mathrm{Min} < D_5 \left(\frac{P^{k-1}}{q} + 1\right)(P+q) P^{\frac{\varepsilon}{2\sigma}} = D_5 P^{\frac{\varepsilon}{2\sigma}} \left(\frac{P^k}{q} + P + P^{k-1} + q\right)$$

$$< D_6 P^{k+\frac{\varepsilon}{2\sigma}} \mathrm{Max}\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{P}, \frac{q}{P^k}\right),$$

$$|S| < D_3 P^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(P^{1-\sigma} + P^{1-\sigma k} D_7 P^{\sigma k + \frac{\varepsilon}{2}} \mathrm{Max}^{\sigma}\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{P}, \frac{q}{P^k}\right)\right)$$

$$< D_8 P^{1+\varepsilon} \mathrm{Max}^{\sigma}\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{P}, \frac{q}{P^k}\right).$$

Satz 6. $$|S_{a,q}| < D_2 q^{1-\sigma+\varepsilon}.$$

Beweis. Satz 5 mit $P = q$, $z = \frac{a}{q}$.

Satz 7. $$q^{-s} |S_{a,q}|^s < E_2 q^{-\frac{9}{4}+\varepsilon}.$$

Beweis. Nach Satz 6 $\left(\text{mit } \frac{\varepsilon}{s} \text{ statt } \varepsilon\right)$ ist

$$q^{-1} |S_{a,q}| < E_3 q^{-\sigma + \frac{\varepsilon}{s}},$$

$$q^{-s} |S_{a,q}|^s < E_2 q^{-\sigma s + \varepsilon} \leqq E_2 q^{-\frac{9}{4}+\varepsilon}.$$

Satz 8. $$|A_q| < E_2 q^{-\frac{5}{4}+\varepsilon}.$$

Beweis. Nach Satz 7 ist

$$|A_q| \leqq q^{-s} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqq a \leqq q}} |S_{a,q}|^s < q E_2 q^{-\frac{9}{4}+\varepsilon}.$$

Satz 9. $$\mathfrak{S}_N = \sum_{q=1}^{\infty} A_q$$

konvergiert, und es ist

$$|\mathfrak{S}_N| < C_{14}.$$

Beweis. Nach Satz 8 mit $\varepsilon = \frac{1}{8}$ ist

$$|A_q| < C_{15} q^{-\frac{9}{8}},$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} |A_q| < C_{15} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-\frac{9}{8}} = C_{14}.$$

Satz 10. $$\Big|\sum_{q>P^{\vartheta}} A_q\Big| < E_4 P^{-\frac{\vartheta}{4}+\varepsilon}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon < \frac{1}{4}$. Dann ist nach Satz 8

$$\Big|\sum_{q>P^{\vartheta}} A_q\Big| < E_2 \sum_{q>P^{\vartheta}} q^{-\frac{5}{4}+\varepsilon} < E_4 P^{-\frac{\vartheta}{4}+\vartheta\varepsilon} \leqq E_4 P^{-\frac{\vartheta}{4}+\varepsilon}.$$

Satz 11. *Für ganzes* $Q > 0$ *ist*

$$\sum_{N=1}^{Q} \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1} \sim \frac{k}{s} Q^{\frac{s}{k}}.$$

Beweis. Nach Satz 7 $\left(\text{mit } \varepsilon = \frac{1}{8}\right)$ und Satz 4 $\left(\text{mit } \lambda = \frac{s}{k} - 1\right)$ ist, wegen $A_1 = 1$,

$$\Big|\sum_{N=1}^{Q} (\mathfrak{S}_N - 1) N^{\frac{s}{k}-1}\Big| = \Big|\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1\leqq a\leqq q}} q^{-s} S_{a,q}^{s} \sum_{N=1}^{Q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} N^{\frac{s}{k}-1}\Big|$$

$$\leqq \sum_{q=2}^{\infty} C_{16}\, q^{-\frac{17}{8}} \sum_{a=1}^{q-1} \Big|\sum_{N=1}^{Q} e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} N^{\frac{s}{k}-1}\Big| < C_{16} W_1 Q^{\frac{s}{k}-1} \sum_{q=2}^{\infty} q^{-\frac{17}{8}} q \log q$$

$$= C_{17} Q^{\frac{s}{k}-1} = o\left(Q^{\frac{s}{k}}\right),$$

$$\sum_{N=1}^{Q} \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1} = \sum_{N=1}^{Q} N^{\frac{s}{k}-1} + o\left(Q^{\frac{s}{k}}\right) = \frac{k}{s} Q^{\frac{s}{k}} + o\left(Q^{\frac{s}{k}}\right).$$

Satz 12. *Für* $z = \frac{a}{q} + y$, $q < P$, $|y| \leqq P^{-k+\delta}$ *ist*

$$|S - q^{-1} S_{a,q} J| < C_{18} P^{\delta} q.$$

Beweis.

$$S = \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{0\leqq \nu \leqq \frac{P-\mu}{q}} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q}+y\right)\varphi(\nu q+\mu)} = \sum_{\mu=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q}\varphi(\mu)} R(\mu), \tag{11}$$

wo

$$R(\mu) = \sum_{0\leqq \nu \leqq \frac{P-\mu}{q}} e^{2\pi i y \varphi(\nu q+\mu)}.$$

Wegen $1 \leqq \nu q + \mu \leqq P$ ist

$$|2\pi\varphi(\nu q+\mu) - 2\pi\alpha(\nu q+\mu)^k| < C_{19} P^{k-1},$$

$$|2\pi y\varphi(\nu q+\mu) - 2\pi y\alpha(\nu q+\mu)^k| \leqq C_{19} |y| P^{k-1} \leqq C_{19} P^{-1+\delta},$$

also,

$$f(t) = e^{2\pi i y \alpha (tq+\mu)^k}$$

gesetzt,

$$|e^{2\pi i y \varphi(\nu q+\mu)} - f(\nu)| < C_{20} P^{-1+\delta},$$

$$\left| R(\mu) - \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{P-\mu}{q}\right]} f(\nu) \right| < C_{21} \frac{P}{q} P^{-1+\delta} \leqq C_{21} P^{\delta}. \tag{12}$$

Für $0 \leqq t \leqq \frac{P-\mu}{q}$ ist

$$|f'(t)| = |2\pi i y \alpha k q (tq+\mu)^{k-1}| < C_{22} P^{-k+\delta} q P^{k-1} = C_{22} P^{-1+\delta} q;$$

für $0 \leqq \nu < \left[\frac{P-\mu}{q}\right]$ ist also

$$\left| f(\nu) - \int_{\nu}^{\nu+1} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{\nu}^{\nu+1} (f(\nu) - f(t))\,dt \right| = \left| \int_{\nu}^{\nu+1} dt \int_{t}^{\nu} f'(u)\,du \right| < C_{22} P^{-1+\delta} q;$$

daher ist

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{P-\mu}{q}\right]} f(\nu) - \int_{0}^{\left[\frac{P-\mu}{q}\right]} f(t)\,dt \right| < 1 + \frac{P}{q} C_{22} P^{-1+\delta} q < C_{23} P^{\delta},$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{P-\mu}{q}\right]} f(\nu) - \int_{-\frac{\mu}{q}}^{\frac{P-\mu}{q}} f(t)\,dt \right| < 2 + C_{23} P^{\delta} < C_{24} P^{\delta}.$$

Hierin ist

$$\int_{-\frac{\mu}{q}}^{\frac{P-\mu}{q}} f(t)\,dt = \frac{1}{q} \int_{0}^{P} e^{2\pi i y \alpha u^k}\,du = q^{-1} J;$$

daher ist

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{P-\mu}{q}\right]} f(\nu) - q^{-1} J \right| < C_{24} P^{\delta}. \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt

$$|R(\mu) - q^{-1} J| < C_{18} P^{\delta},$$

also nach (11)

$$|S - q^{-1} S_{a,q} J| = \left| \sum_{\mu=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q} \varphi(\mu)} (R(\mu) - q^{-1} J) \right| < C_{18} P^{\delta} q.$$

Satz 13. *Für* $z = \frac{a}{q} + y$, $q < P$, $|y| \leqq P^{-k+\delta}$ *ist*

$$|S^s - q^{-s} S_{a,q}^s J^s| < E_5 P^{s-1+\delta+\varepsilon} q^{-1}.$$

Beweis. Wegen $|y| < \frac{1}{q^2}$, $\frac{q}{P^k} < \frac{1}{P} < \frac{1}{q}$ ist nach Satz 5

$$|S| < E_6 P^{1+\frac{\varepsilon}{s}} q^{-\sigma};$$

nach Satz 6 ist, wegen $|J| \leqq P$,

$$|q^{-1} S_{a,q} J| < E_7 q^{-\sigma+\frac{\varepsilon}{s}} P < E_7 P^{1+\frac{\varepsilon}{s}} q^{-\sigma},$$

also

$$\text{Max}(|S|, |q^{-1} S_{a,q} J|) < E_8 P^{1+\frac{\varepsilon}{s}} q^{-\sigma}. \tag{14}$$

Aus

$$\begin{aligned} |u^s - v^s| &= |u - v|\,|u^{s-1} + u^{s-2} v + \ldots + v^{s-1}| \\ &\leqq |u - v|\, s\, \text{Max}^{s-1}(|u|, |v|), \end{aligned}$$

Satz 12 und (14) folgt also

$$|S^s - q^{-s} S_{a,q}^s J^s| < C_{18} P^{\delta} q s E_8^{s-1} P^{s-1+\varepsilon} q^{-(s-1)\sigma} \leqq E_5 P^{s-1+\delta+\varepsilon} q^{-1}.$$

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Hauptsatz.

$$\left| r(N) - K \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1} \right| < C_{25} N^{\frac{s}{k}-1-B_1}. \tag{15}$$

Beweis. Aus (2) folgt nach (6) (mit $Q = N$)

$$h_\nu < C_9 N^{\frac{1}{k}}.$$

Es sei zunächst

$$N > 2^{\frac{k}{1-\vartheta-\delta}} C_9^{-k} = C_{26},$$

also,

$$C_9 N^{\frac{1}{k}} = P$$

gesetzt,

$$P > 2^{\frac{1}{1-\vartheta-\delta}} > 2 > 1.$$

Da

$$h_\nu < P$$

sein muß, ist

$$r(N) = \sum_{1 \leqq x_\nu \leqq P} \int_0^1 e^{2\pi i z \left(\sum_{\nu=1}^{s} q(x_\nu) - N \right)} dz = \int_0^1 e^{-2\pi i N z} \prod_{\nu=1}^{s} \sum_{1 \leqq x_\nu \leqq P} e^{2\pi i z \varphi(x_\nu)} dz$$

$$= \int_0^1 S^s e^{-2\pi i N z} dz. \tag{16}$$

Die Fareybrüche $\frac{a}{q}$, $(a, q) = 1$, mit $0 \leqq a \leqq q \leqq P^{k-1}$ und ihre Medianten zerlegen den Integrationsweg in Intervalle

$$z = \frac{a}{q} + y, \quad (a, q) = 1, \quad q \leqq P^{k-1},$$

$$0 < a \leqq q, \quad -\vartheta_1 \leqq y \leqq 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leqq a < q, \quad 0 \leqq y \leqq \vartheta_2,$$

wo

$$\frac{1}{2qP^{k-1}} \leqq \vartheta_1 = \vartheta_1(q, a, P, k) < \frac{1}{qP^{k-1}},$$

$$\frac{1}{2qP^{k-1}} \leqq \vartheta_2 = \vartheta_2(q, a, P, k) < \frac{1}{qP^{k-1}},$$

also sicher

$$|y| < \frac{1}{qP^{k-1}} \leqq \frac{1}{q^2}.$$

Die Intervalle mit $q \leqq P^\vartheta$ werden bei $y = \pm P^{-k+\delta}$ durchgeschnitten; man beachte

$$P^{-k+\delta} \leqq \frac{2P^{\vartheta-1+\delta}}{2qP^{k-1}} < \frac{1}{2qP^{k-1}} \leqq \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix}.$$

Damit haben wir drei Klassen von Intervallen:

1. $1 \leqq q \leqq P^\vartheta$, $\quad -P^{-k+\delta} \leqq y \leqq 0$ bzw. $0 \leqq y \leqq P^{-k+\delta}$;
2. $P^\vartheta < q \leqq P^{k-1}$, $\quad -\vartheta_1 \leqq y \leqq 0$ bzw. $0 \leqq y \leqq \vartheta_2$;
3. $1 \leqq q \leqq P^\vartheta$, $\quad -\vartheta_1 \leqq y \leqq -P^{-k+\delta}$ bzw. $P^{-k+\delta} \leqq y \leqq \vartheta_2$.

Ist H_1 die Integralsumme der ersten Klasse,

$$H_\nu = \sum_{\nu\text{-te Klasse}} \int |S|^s dz \quad \text{für } \nu = 2 \text{ und } \nu = 3,$$

so ist nach (16)

$$|r(N) - H_1| \leqq H_2 + H_3. \tag{17}$$

Erste Klasse: Nach Satz 13 ist dort

$$\left| S^s e^{-2\pi i N z} - q^{-s} S_{a,q}^s e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} e^{-2\pi i N y} J^s \right| < E_5 P^{s-1+\delta+\varepsilon} q^{-1}.$$

Bei Integration über die zwei an $\frac{a}{q}$ (im Falle $q > 1$) bzw. an $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ anliegenden Intervalle ergibt sich, wenn das T mit $c = C_9^{-k}$ eingeführt

wird (so daß $N = cP^k$ ist),

$$\left| \int S^s e^{-2\pi i N z} dz - q^{-s} S_{a,q}^s e^{-2\pi i \frac{a}{q} N} T \right| \leqq 2 E_5 P^{s-k-1+2\delta+\varepsilon} q^{-1};$$

durch Summation über die erste Klasse (T ist allemal dasselbe) folgt

$$(18) \quad |H_1 - T \sum_{q \leqq P^\vartheta} A_q| \leqq \sum_{q \leqq P^\vartheta} 2q E_5 P^{s-k-1+2\delta+\varepsilon} q^{-1} \leqq 2 E_5 P^{s-k-1+2\delta+\vartheta+\varepsilon}.$$

Nach (4) und Satz 10 ist

$$(19) \quad \left| T \sum_{q \leqq P^\vartheta} A_q - T \mathfrak{S}_N \right| = |T| \left| \sum_{q > P^\vartheta} A_q \right| < E_9 P^{s-k-\frac{\vartheta}{4}+\varepsilon},$$

nach (3) und Satz 9

$$(20) \quad |T \mathfrak{S}_N - L \mathfrak{S}_N P^{s-k}| < C_{27} P^{s-k-2\delta}.$$

Aus (18), (19) und (20) folgt

$$(21) \quad |H_1 - L \mathfrak{S}_N P^{s-k}| < E_{10} P^{s-k-\mathrm{Min}\left(1-2\delta-\vartheta, \frac{\vartheta}{4}, 2\delta\right)+\varepsilon}.$$

Zweite Klasse: Wegen

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{P^\vartheta}, \quad \frac{q}{P^k} \leqq \frac{1}{P} < \frac{1}{P^\vartheta}$$

gibt Satz 5

$$|S| < E_{11} P^{1+\frac{\varepsilon}{2s}-\vartheta\sigma},$$

$$|S|^{s-4} < E_{12} P^{s-4+\frac{\varepsilon}{2}-(s-4)\vartheta\sigma};$$

wegen

$$(s-4)\sigma \geqq k-2-\sigma$$

ist also

$$|S|^{s-4} < E_{12} P^{s-4-(k-2+\sigma)\vartheta+\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$H_2 \leqq E_{12} P^{s-4-(k-2+\sigma)\vartheta+\frac{\varepsilon}{2}} \int_0^1 |S|^4 dz.$$

Nun ist

$$\int_0^1 |S|^4 dz = \sum_{\substack{1 \leqq x_\nu \leqq P \\ \nu = 1, \ldots 4}} \int_0^1 e^{2\pi i z(\varphi(x_1)+\varphi(x_2)-\varphi(x_3)-\varphi(x_4))} dz$$

die Lösungszahl von (9), also nach Satz 3

$$< E_{13} P^{2+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Daher ist

$$(22) \quad H_2 < E_{14} P^{s-k-((k-2+\sigma)\vartheta-(k-2))+\varepsilon}.$$

Dritte Klasse: Wegen

$$\frac{2}{q|y|} \geqq \frac{1}{q|y|} > P^{k-1} > 1$$

gibt es nach den Eigenschaften der Fareybrüche zu $z = \frac{a}{q} + y$ drei Zahlen a_1, q_1, y_1 mit

$$z = \frac{a_1}{q_1} + y_1, \qquad 0 \leqq a_1 \leqq q_1 \leqq \frac{2}{q|y|}, \qquad (a_1, q_1) = 1, \qquad |y_1| < \frac{q|y|}{2q_1},$$

also

$$|y_1| < \frac{1}{q_1^2}.$$

Hierbei kann nicht

$$P^{\vartheta} < q_1 \leqq P^{k-1}$$

sein; denn wegen

$$|y_1| < \frac{q|y|}{2q_1} < \frac{1}{2q_1 P^{k-1}}$$

läge sonst z innerhalb eines Intervalls zweiter Klasse oder auf seinem Fareybruchende.

Es kann auch nicht

$$q_1 \leqq P^{\vartheta}$$

sein; denn sonst wäre

$$|aq_1 - a_1 q| = qq_1 \left|\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1}\right| = qq_1|y - y_1| \leqq q_1 q|y| + qq_1|y_1|$$

$$< q_1 q|y| + qq|y| = (q_1 + q)q|y| < (P + P)\frac{1}{P^{k-1}} = \frac{2}{P^{k-2}} \leqq \frac{2}{P} < 1,$$

$$aq_1 - a_1 q = 0,$$

$$q/q_1, \qquad q_1/q,$$

$$q_1 = q,$$

$$a_1 = a,$$

$$y_1 = y,$$

$$|y_1| = \frac{q|y|}{q_1} > \frac{q|y|}{2q_1}.$$

Daher ist

$$q_1 > P^{k-1},$$

$$\frac{1}{q_1} < \frac{1}{P} < \frac{q_1}{P^k},$$

und Satz 5 gibt

$$|S| < E_{15} P^{1+\frac{\varepsilon}{s}} \left(\frac{q_1}{P^k}\right)^{\sigma} < E_{16} P^{1+\frac{\varepsilon}{s}} \left(\frac{1}{q|y|P^k}\right)^{\sigma},$$

also (wegen $|y|P^k > 1$)

$$|S|^s < E_{17} P^{s+\varepsilon} \frac{1}{(q|y|P^k)^{\sigma s}} \leqq E_{17} P^{s+\varepsilon} (q|y|P^k)^{-\frac{9}{4}} = E_{17} P^{s-\frac{9}{4}k+\varepsilon} q^{-\frac{9}{4}} |y|^{-\frac{9}{4}}.$$

Für jedes Intervall dritter Klasse gilt also

$$\int |S|^s dz < E_{17} P^{s-\frac{9}{4}k+\varepsilon} q^{-\frac{9}{4}} \int_{P^{-k+\delta}}^{\infty} y^{-\frac{9}{4}} dy = E_{18} P^{s-\frac{9}{4}k+\varepsilon} q^{-\frac{9}{4}} P^{\frac{5}{4}k-\frac{5}{4}\delta}$$

$$= E_{18} P^{s-k-\frac{5}{4}\delta+\varepsilon} q^{-\frac{9}{4}}.$$

Daher ist

$$H_3 < E_{18} P^{s-k-\frac{5}{4}\delta+\varepsilon} \sum_{q=1}^{\infty} 2q^{-\frac{5}{4}} = E_{19} P^{s-k-\frac{5}{4}\delta+\varepsilon}. \tag{23}$$

Aus (17), (21), (22) und (23) folgt,

$$\operatorname{Min}\left(1-2\delta-\vartheta, \frac{\vartheta}{4}, \frac{5}{4}\delta, (k-2+\sigma)\vartheta-(k-2)\right) = M = M(k)$$

gesetzt,

$$|r(N) - L\mathfrak{S}_N P^{s-k}| < E_{20} P^{s-k-M+\varepsilon}.$$

Man wähle nun $\vartheta = \vartheta(k)$ irgendwie mit

$$\frac{k-2}{k-2+\sigma} < \vartheta < 1$$

und alsdann $\delta = \delta(k)$ irgendwie mit

$$0 < \delta < \frac{1-\vartheta}{2};$$

dann ist

$$\delta + \vartheta < 2\delta + \vartheta < 1,$$
$$M > 0,$$

also, wenn

$$\varepsilon = \frac{M}{2}, \qquad B_1 = \frac{M}{2k}$$

gesetzt wird,

$$|r(N) - L\mathfrak{S}_N P^{s-k}| < C_{28} P^{s-k-kB_1},$$

$$\left|r(N) - L_1 \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1}\right| < C_{29} N^{\frac{s}{k}-1-B_1}, \tag{24}$$

wo L_1 nur von k, s, α, β abhängt.

(24) fanden wir für $N > C_{26}$. Für $N > 0$ ist also

$$\left|r(N) - L_1 \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1}\right| < C_{25} N^{\frac{s}{k}-1-B_1}. \tag{25}$$

Daher ist

$$\sum_{N=1}^{Q} r(N) - L_1 \sum_{N=1}^{Q} \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1} = o\left(Q^{\frac{s}{k}}\right),$$

also nach Satz 2 und Satz 11

$$\frac{k}{s}(K-L_1)\,Q^{\frac{s}{k}} = o\left(Q^{\frac{s}{k}}\right).$$

Folglich ist

$$L_1 = K$$

und (25) unsere Behauptung (15).

Anhang.

§ 1.

Beweis des Hauptsatzes mit $B_1 = \frac{1}{k\,2^k}$.

Die erste und dritte Klasse werden wie oben behandelt, $C_{30} > C_{26}$ so gewählt, daß für $N > C_{30}$

$$P^{\vartheta} < \frac{P}{2} - 1$$

ist, und für $N > C_{30}$ die zweite Klasse so gespalten:

21. $\frac{P}{2} \leqq q \leqq P^{k-1}$, $-\vartheta_1 \leqq y \leqq 0$ bzw. $0 \leqq y \leqq \vartheta_2$;

22. $P^{\vartheta} < q < \frac{P}{2}$, $-P^{-k} \leqq y \leqq 0$ bzw. $0 \leqq y \leqq P^{-k}$;

23. $P^{\vartheta} < q < \frac{P}{2}$, $-\vartheta_1 \leqq y \leqq -P^{-k}$ bzw. $P^{-k} \leqq y \leqq \vartheta_2$.

(Man beachte

$$P^{-k} < \frac{1}{2\,q\,P^{k-1}} \quad \text{für} \quad q < \frac{P}{2}.)$$

21. Wegen $\frac{1}{q} \leqq \frac{2}{P}$, $\frac{q}{P^k} \leqq \frac{1}{P}$ gibt Satz 5

$$|S| < E_{21}\,P^{1+\frac{\varepsilon}{2s}-\sigma},$$

$$\Sigma\int |S|^s\,dz < E_{22}\,P^{s-4-(k-2+\sigma)+\frac{\varepsilon}{2}}\,P^{2+\frac{\varepsilon}{2}} = E_{22}\,P^{s-k-\frac{1}{2^{k-1}}+\varepsilon}.$$

22. Wegen $\frac{q}{P^k} < \frac{1}{P} < \frac{1}{q}$ gibt Satz 5

$$S| < E_{23}\,P^{1+\frac{\varepsilon}{s}}\,q^{-\sigma},$$

$$|S|^s < E_{24}\,P^{s+\varepsilon}\,q^{-\frac{9}{4}},$$

$$\Sigma\int |S|^s\,dz < 2E_{24}\,P^{s-k+\varepsilon} \sum_{q>P^{\vartheta}} q^{-\frac{5}{4}} < E_{25}\,P^{s-k-\frac{\vartheta}{4}+\varepsilon}.$$

23. Es ergibt sich fast wörtlich nach der Methode der dritten Klasse ($q_1 > P^{k-1}$ folgt jedoch hier aus der Unmöglichkeit von $\frac{P}{2} \leqq q_1 \leqq P^{k-1}$ und von $q_1 < \frac{P}{2}$)

$$|S|^s < E_{26} P^{s-\frac{9}{4}k+\varepsilon} q^{-\frac{9}{4}} |y|^{-\frac{9}{4}};$$

also ist

$$\sum \int |S|^s dz < 2 E_{26} P^{s-\frac{9}{4}k+\varepsilon} \sum_{q>P^{\vartheta}} q \cdot q^{-\frac{9}{4}} \int_{P^{-k}}^{\infty} y^{-\frac{9}{4}} dy < E_{27} P^{s-k-\frac{\vartheta}{4}+\varepsilon}.$$

Insgesamt ist also für $N > C_{30}$

$$\left| r(N) - L_1 \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1} \right| < E_{28} N^{\frac{s}{k}-1-\frac{1}{k}M_1+\varepsilon}$$

mit

$$M_1 = \mathrm{Min}\left(1 - 2\delta - \vartheta,\ \frac{\vartheta}{4},\ \frac{5}{4}\delta,\ \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Bei passenden $\delta(k)$, $\vartheta(k)$ mit $\delta > 0$, $\vartheta > 0$, $\delta + \vartheta < 1$ ist

$$M_1 > \frac{1}{2^k};$$

denn man wähle (wie Herr Winogradoff)

$$\delta = 0{,}12; \qquad \vartheta = 0{,}6;$$

dann ist

$$M_1 = \mathrm{Min}\left(0{,}16;\ 0{,}15;\ 0{,}15;\ \frac{1}{2^{k-1}}\right) > \frac{1}{2^k}.$$

Für $N > 0$ ist also

$$\left| r(N) - L_1 \mathfrak{S}_N N^{\frac{s}{k}-1} \right| < C_{31} N^{\frac{s}{k}-1-\frac{1}{k2^k}}$$

und hierin

$$L_1 = K.$$

§ 2.

Direkte Berechnung von L.

Es soll

$$L = c^{\frac{s}{k}-1} \alpha^{-\frac{s}{k}} \frac{\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}$$

herauskommen. Hierbei ist $c = C_9^{-k} \leqq \alpha$; denn aus (2) folgte $h_1 < C_9 N^{\frac{1}{k}}$, und das tut kein $C_9 < \alpha^{-\frac{1}{k}}$, wie $h_2 = \ldots = h_s = 1$, $h_1 \to \infty$ zeigt. Die

Substitution $v = \frac{V}{\alpha}$ lehrt, daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 < c \leqq \alpha = 1$ angenommen werden kann.

Dann ist L der $\lim_{\omega=\infty}$ von

$$\int_{-\omega}^{\omega} e^{-2\pi i c v}\left(\int_0^1 e^{2\pi i v w^k} dw\right)^s dv = \int_0^1 \dots \int_0^1 dw_1 \dots dw_s \int_{-\omega}^{\omega} e^{2\pi i v\left(\sum_1^s w_\nu^k - c\right)} dv$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\sin 2\pi\omega\left(\sum_1^s w_\nu^k - c\right)}{\sum_1^s w_\nu^k - c} dw_1 \dots dw_s$$

$$= \frac{1}{\pi k} \int_{-c}^{s-c} \frac{\sin 2\pi\omega t}{t} dt \int_{\substack{0 \leqq w_\nu \leqq 1 \\ c-1+t \leqq \sum_1^{s-1} w_\nu^k \leqq c+t}} \dots \int \frac{dw_1 \dots dw_{s-1}}{\left(c + t - \sum_1^{s-1} w_\nu^k\right)^{1-\frac{1}{k}}}$$

$$= \frac{1}{\pi k} \int_{-c}^{s-c} \frac{\sin 2\pi\omega t}{t} (c+t)^{\frac{s}{k}-1} dt \int_{\substack{0 \leqq x_\nu \leqq \sqrt[k]{c+t} \\ 1-\frac{1}{c+t} \leqq \sum_1^{s-1} x_\nu^k \leqq 1}} \dots \int \frac{dx_1 \dots dx_{s-1}}{\left(1 - \sum_1^{s-1} x_\nu^k\right)^{1-\frac{1}{k}}}.$$

Das Integral nach den x_ν ist für $-c \leqq t \leqq 1-c$ konstant, da das Integrationsgebiet dann einfach $0 \leqq x_\nu$, $\sum_1^{s-1} x_\nu^k \leqq 1$ lautet. Sein Wert für $t = 1-c$ ist bekanntlich $k \frac{\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}$. Für wachsendes $t \geqq 1-c$ fällt das (stetige) Integral monoton, da das Integrationsgebiet sich zusammenzieht.

$(c+t)^{\frac{s}{k}-1}$ mal dem Integral ist also für $-c \leqq t \leqq s-c$ von beschränkter Variation, und ein klassischer Dirichletscher Satz liefert

$$L = c^{\frac{s}{k}-1} \frac{\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}.$$

Göttingen, den 8. Juni 1929.

(Eingegangen am 9. Juni 1929.)

Die Drittelungskurve.

Von

Friedrich Levi in Leipzig.

Bei einer gewissen Klasse von geometrischen Fragen handelt es sich um Beziehungen von Punktmengen, über die nur ganz allgemeine Voraussetzungen gemacht werden, zu sehr speziellen geometrischen Gebilden.

Zum Beispiel: In jeden ebenen konvexen Bereich kann man ein Quadrat einbeschreiben[1]). — Jeder ebene konvexe Bereich wird durch ein geeignetes orthogonales Achsenkreuz in vier gleichgroße Teile geteilt[2]). — Zwei in derselben Ebene gelegene konvexe Bereiche können stets durch eine geeignete Gerade gleichzeitig halbiert werden (d. h. man kann stets ein belegtes Brot mit einem einzigen Schnitt gerecht teilen)[3]. — Man kann einen ebenen konvexen Bereich stets durch drei Gerade, die durch denselben Punkt gehen und drei gleiche Winkel bilden, gleichzeitig halbieren.

Da der Beweis dieser letzten Behauptung für die ganze Klasse von Fragen charakteristisch ist, soll er hier vorausgeschickt werden. Sind drei Geraden, die gleiche Winkel bilden, gegeben, so kann man sie so zu sich parallel verschieben, daß jede den vorgegebenen Bereich halbiert. Gehen die parallel verschobenen Geraden nicht durch denselben Punkt, so bestimmen sie ein gleichseitiges Dreieck. Orientiert man die Geraden so, daß ihre Richtungen die positive Umlaufung dieses Dreiecks induzieren, so mögen die Geraden die Winkel

$$\varphi, \quad \varphi + \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi + \frac{4\pi}{3}$$

[1]) O. Toeplitz, Vortrag in Solothurn 1911; vgl. Jahrbuch über die Fortschritte der Math. **48**, S. 833.

[2]) R. Zindler, Über konvexe Gebilde II, Monatsh. f. Math. **31** (1922), S. 25—56.

[3]) L. Neder (mündliche Mitteilung).

mit der (beliebigen) x-Achse bilden. Zu jedem Werte von φ gehört genau eine solche Figur, und zwar unterscheiden sich die zu φ und zu $\varphi + \pi$ gehörigen Figuren nur durch die Orientierung. Bei stetigem Übergang von φ zu $\varphi + \pi$ ändert der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks sein Vorzeichen; für mindestens einen Zwischenwert muß dieses Dreieck also — wie behauptet wurde — in einen Punkt ausarten.

Es liegt nun die Vermutung nahe, daß es auch möglich ist, einen ebenen konvexen Bereich durch ein gleichseitiges Dreibein (drei Halbgerade, die vom gleichen Punkt ausgehend drei gleiche Winkel bilden) in drei gleiche Teile zu teilen. Die Richtigkeit dieser Vermutung wird (§ 1) unter sehr viel allgemeineren Voraussetzungen gezeigt werden. Insbesondere wird noch eine Massenbelegung zugelassen, die unter gewissen Einschränkungen noch von der Lage des teilenden Dreibeins abhängig sein darf; diese Verallgemeinerung erleichtert die Beweisführung. Der Satz wird für beliebig viele Dimensionen bewiesen. Im zweidimensionalen Fall (§ 2) bestimmen die Scheitel der zulässigen Dreibeine eine Kurve, die Drittelungskurve. Außer an gewissen, näher diskutierten Stellen ist diese differentiierbar.

§ 1.

In einem kartesischen Raume von n Dimensionen seien die Vektoren

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{n+1} \tag{1}$$

gegeben. Zwischen ihnen muß dann eine Relation

$$\sum \varkappa_i \mathfrak{a}_i = 0 \tag{2}$$

bestehen. Die durch einen festen Scheitel O und die Vektoren (1) bestimmten Halbgeraden sollen dann ein *konvexes* $(n+1)$-*Bein* bestimmen, wenn

1. alle Relationen zwischen den Vektoren (1) von (2) abhängig sind,
2. alle $\varkappa_i$ in (2) dasselbe Vorzeichen haben.

Es ist also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man (2) durch

$$\sum \mathfrak{a}_i = 0 \tag{2'}$$

ersetzt. Ein beliebiger Punkt des Raumes wird dann durch einen in O angehefteten Vektor

$$\sum \lambda_i \mathfrak{a}_i \tag{3}$$

bestimmt. Wegen (2) sind die λ_i nur bis auf eine gemeinsame additive Konstante bestimmt. Sie soll immer so normiert werden, daß

$$\sum \lambda_i = 0 \tag{4}$$

wird. Dann sind die λ_i eindeutig durch die Punkte bestimmt und umgekehrt. Das konvexe $(n+1)$-Bein erzeugt $n+1$ *Teilräume*, und zwar besteht der k-te Teilraum aus den Punkten, für die

$$\lambda_k \leqq \lambda_i \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

ist. Zu jedem Teilraum gehört der Scheitel O, für den alle λ verschwinden. Im übrigen ist im k-ten Teilraum $\lambda_k \geq 0$. Die Teilräume sind konvex, ebenso die *Grenzsektoren*, die mehreren Teilräumen gemeinsam sind; zu diesen gehören auch die einzelnen *Beine*. Z. B. haben die Punkte des ersten Beins die λ-Koordinaten

$$n\alpha, -\alpha, \ldots, -\alpha, \tag{5}$$

wobei α alle nicht negativen reellen Zahlen durchläuft. Eine Verschiebung des $(n+1)$-Beins längs des ersten Beins hat zur Folge, daß ein Wertesystem (5) zu allen λ-Koordinaten sämtlicher Punkte addiert oder von ihnen subtrahiert wird. Durch eine solche Verschiebung kann man daher stets erreichen, daß ein gegebener Punkt oder ein beschränkter Raumteil ganz in den ersten Teilraum oder auch ganz außerhalb desselben fällt.

Es sei nun im n-dimensionalen Raum ein konvexes $(n+1)$-Bein der Gestalt nach gegeben, außerdem eine Dichtefunktion ϱ, die außerhalb eines beschränkten Bereiches B verschwindet. In jedem Teilbereich von B, der durch Teilung vermittels (Hyper-) Ebenen entsteht, sei ϱ (in irgendeinem Sinne) integrabel, das Integral — im folgenden mit Masse bezeichnet — gegen kongruente Transformationen des kartesischen Koordinetensystems invariant und daher auch von der Reihenfolge der Integration unabhängig. Es kann ϱ außer vom Ort auch noch von der Lage des Scheitels des seiner Gestalt nach gegebenen $(n+1)$-Beins abhängig sein, jedoch so, daß bei Parallelverschiebung des $(n+1)$-Beins 1. die zu den einzelnen Teilräumen gehörigen Massen stetig von der Lage des Scheitels abhängen, 2. die Masse des i-ten Teilraums nicht zunimmt, wenn der Scheitel in einen im i-ten Teilraum gelegenen Punkt M verlegt wird, 3. wenn weder alle Masse in den Teilräumen liegt, zu denen der neue Scheitel M gehört, noch diese Teilräume alle von Masse frei sind, es unter diesen Teilräumen mindestens einen gibt, dessen Masse bei der Parallelverschiebung abnimmt. Liegt also z. B. ein echter Bruchteil der Gesamtmasse im i-ten Teilraum, und verschiebt man das $(n+1)$-Bein parallel so, daß der Scheitel in einen innern Punkt des i-ten Teilraumes fällt, so nimmt die Masse des i-ten Teilraumes ab.

Diese Voraussetzungen sind z. B. stets erfüllt, wenn B konvex und ϱ eine von der Lage des Scheitels unabhängige, positive, beschränkte, stetige

Ortsfunktion in B ist. Unter den allgemein gemachten Voraussetzungen wird jetzt bewiesen:

Bei beliebig gegebener Lage des $(n+1)$-Beins kann man durch Parallelverschiebung genau eine Lage herstellen, in der alle Teilräume dieselbe Masse haben.

Beweis. Durch Verschiebung parallel zum $(n+1)$-ten Bein kann man sowohl erreichen, daß alle Masse im $(n+1)$-ten Teilraum liegt, als auch, daß dieser Teilraum von Masse frei ist. Wegen der Stetigkeit gibt es daher eine Lage, bei der die Masse im $(n+1)$-ten Teilraum genau $\frac{1}{n+1}$ der Gesamtmasse ausmacht; aus der dritten Voraussetzung über die Funktion ϱ folgt aber, daß nicht mehr als eine solche Lage durch Verschiebung in Richtung des $(n+1)$-ten Beins entstehen kann. Damit ist der Satz für $n=1$ bewiesen. Es wird jetzt angenommen, daß er für $n=m-1$ richtig ist und daraus seine Gültigkeit für $n=m$ gefolgert. Hierbei werden nur die Lagen des $(m+1)$-Beins in Betracht gezogen, bei denen im $(m+1)$-ten Teilraum genau $1:(m+1)$ der Masse liegt. Man projiziere die Teilräume in der Richtung des $(m+1)$-ten Beins auf die (Hyper-) Ebene $\lambda_{m+1}=0$. Hier entsteht dann eine Teilung durch ein konvexes m-Bein. Den einzelnen Punkten der Hyperebene werde dabei die Dichte

$$\varrho' = \int \varrho \cos\varphi \, ds$$

zugeteilt. Das Integral ist hierbei zu erstrecken über die durch den betreffenden Punkt gehende Parallele zum $(m+1)$-ten Bein, soweit diese außerhalb des $(m+1)$-ten Teilraums liegt, und φ ist der Winkel zwischen der (Hyper-) Ebene $\lambda_{m+1}=0$ und dem $(m+1)$-ten Bein. Die so definierte Gesamtmasse in der Projektion ist das $\frac{m}{m+1}$-fache der ursprünglichen Gesamtmasse. Jeder der m ersten Teilräume hat die gleiche Masse, wie seine Projektion. Den Parallelverschiebungen des m-Beins in der (Hyper-) Ebene entsprechen ein-eindeutig die Parallelverschiebungen des $(m+1)$-Beins, bei denen $\frac{1}{m+1}$ der Masse im $(m+1)$-ten Teilraum liegt. Diese Verschiebungen können aber nicht in das Innere des $(m+1)$-ten Teilraums gerichtet sein. Die Parallelverschiebungen des m-Beins sind also Projektionen von Parallelverschiebungen des $(m+1)$-Beins, die in die m ersten Teilräume gerichtet sind. Die Massen in diesen Teilräumen erhalten dabei dieselben Zuwüchse, wie ihre Projektionen. Die Dichte ϱ' in der Hyperebene genügt also den Bedingungen, die für die Dichte ϱ im m-dimensionalen Raume gefordert werden. Nach der Induktionsvoraussetzung kann man daher das m-Bein in eine eindeutig bestimmte Lage so verschieben,

daß in den m Teilräumen der (Hyper-) Ebene dieselbe Masse vorhanden ist. Dasselbe muß dann aber auch für die vom entsprechenden $(m+1)$-Bein bestimmten Teilräume des m-dimensionalen Raumes gelten.

§ 2.

Nach dem eben bewiesenen Satze gibt es zu jeder Stellung des konvexen $(n+1)$-Beins eine Lage, in der es den Bereich B in $n+1$ Teile von gleicher Masse teilt. Der $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale kompakte Raum der Stellungen wird dadurch auf den Raum der zugehörigen Scheitel eindeutig abgebildet. Im Falle $n=2$ erhält man so eine Kurve, die *Drittelungskurve*, die jetzt hinsichtlich ihrer Stetigkeitseigenschaften und ihrer Singularitäten untersucht werden soll.

Zur Vereinfachung wird angenommen, daß B ein beschränkter, konvexer, ebener Bereich ist und daß in B die Funktion ϱ eine im Lebesgueschen Sinne integrable Ortsfunktion (also von der Lage des Scheitels unabhängig) ist, die positive obere und untere Schranken hat. Es sei M ein Punkt der Drittelungskurve; bei genügend kleinen Drehungen des Dreibeins um M ändert sich die Masse in den drei Teilräumen beliebig wenig; es werden dann alle Teilräume Masse behalten und wegen der Konvexität muß B aus mindestens zwei Beinen endliche Intervalle ausschneiden, die im Innern von B liegen. Die Parallelverschiebung, welche die durch die Drehung erzeugten Massenzuwüchse kompensiert, verlege den Scheitel von M nach M'. Dann liegt M' in einem Teilraum, der Masse abgibt. Dieser erhält durch die Parallelverschiebung keine neuen Punkte von B, verliert aber eine endliche Strecke von inneren Punkten. Da ϱ eine untere positive Schranke hat, muß daher zur Kompensation einer genügend kleinen Drehung die Parallelverschiebung beliebig klein sein. Die Drittelungskurve ist daher stetig.

Haben längs der Grenzstrecken der Teilräume die Massenbelegungen bei abnehmender Streifenbreite einen Limes, so gilt dasselbe auch für die Drehmomente der unendlich schmalen Streifen hinsichtlich des Scheitels. Die Zuwüchse der Teilraummassen sind bei Drehung um den Scheitel in erster Annäherung den Differenzen dieser Momente

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3$$

und der Änderung des Drehwinkels φ proportional. Diese Zuwüchse sind also nach φ differentiierbar,

$$d_1 = (b_2 - b_3)\,d\varphi, \qquad d_2 = (b_3 - b_1)\,d\varphi, \qquad d_3 = (b_1 - b_2)\,d\varphi.$$

Ebenso sind die Zuwüchse bei Parallelverschiebung vom Limes der Massen-

belegung auf den Grenzstrecken und den Winkeln, die diese mit der Verschiebungsrichtung bilden, in erster Annäherung linear abhängig. Man kann für die infinitesimalen Zuwüchse also setzen:

$$\delta_1 = a_1\,dx + c_1\,dy, \qquad \delta_2 = a_2\,dx + c_2\,dy, \qquad \delta_3 = a_3\,dx + c_3\,dy,$$
$$\Sigma a_i = \Sigma c_i = 0.$$

Handelt es sich um Parallelverschiebungen von Dreibeinen, bei denen alle drei Teilräume Masse enthalten, so kann höchstens einer der Zuwüchse verschwinden. Es ist also

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die Gleichungen

$$\delta_i = -\,d_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

besitzen also ein System von Lösungen (dx, dy), außer wenn alle d_i verschwinden, d. h. wenn

$$b_1 = b_2 = b_3 \tag{6}$$

ist. Unter den gemachten Voraussetzungen ist also die Drittelungskurve eine „im allgemeinen" differentiierbare Kurve. Singularitäten treten dann und nur dann auf, wenn entweder 1. die Massenbelegung an den Grenzstrecken der Teilräume keinen Limes hat („pathologische" Massenverteilung) oder 2. die Formel (6) gilt (besonders gleichmäßige Massenverteilung).

Ist die Masse in B homogen und liegt der Scheitel in B, so bedeutet das Auftreten einer Singularität der zweiten Art, daß die drei Beine gleich lang sind. Das tritt beispielsweise bei einer homogen mit Masse belegten Kreisscheibe ein, wenn man sie mit einem gleichseitigen Dreibein drittelt. Die ganze Kurve artet in den Kreismittelpunkt aus.

Ein Beispiel einer Drittelungskurve mit einer einzigen Singularität kann man nach folgender Methode konstruieren:

Ein Kreis um O werde durch die drei Punkte A_1, A_2, A_3 in drei gleich große Bögen zerlegt. Jeder Bogen werde durch einen konvexen unendlichen Sehnenzug ersetzt, und zwar sollen diese Sehnenzüge durch Drehung um O auseinander hervorgehen. Sie sollen folgendermaßen bezeichnet werden:

$$A_1, c_1, c_2', c_3'', \ldots, c_{3i+1}, c_{3i+2}', c_{3i+3}'', \ldots\ldots, A_2;$$
$$A_2, c_1'', c_2, c_3', \ldots, c_{3i+1}'', c_{3i+2}, c_{3i+2}', \ldots\ldots, A_3;$$
$$A_3, c_1', c_2'', c_3, \ldots, c_{3i+1}', c_{3i+2}'', c_{3i+3}, \ldots\ldots, A_1.$$

Der Mittelpunkt der Sehne $c_i^{(\nu)}$ heiße jeweils $M_i^{(\nu)}$. An die von den Sehnenzügen begrenzte konvexe Figur werden nun wieder geeignete kleine Stücke

angesetzt, und zwar seien die an c_i, c_i', c_i'' angesetzten Stücke flächengleich. Hinsichtlich $O M_i$ sei das an c_i angesetzte Stück zu sich selbst, die an c_i' und c_i'' angesetzten Stücke zueinander symmetrisch, aber so, daß die Schwerpunkte der letztgenannten Stücke im stumpfen Winkel $M_i' O M_i''$ liegen. Es sind also „Hämmerchen", die vom Radius $O M_i$ abgewandt liegen. Man wähle die angesetzten Stücke derart, daß die so entstehende Figur konvex bleibt und nehme konstante Dichte an. Drittelt man die Figur mit einem gleichseitigen Dreibein, so entsteht, wie man sich leicht überzeugt, eine Singularität, wenn das Dreibein die Lage $O(A_1, A_2, A_3)$ annimmt.

Gries im Sellrain, 26. 8. 1929.

(Eingegangen am 28. August 1929.)

Zum Sturm-Liouvilleschen Problem.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

Es sei $p(x)$ eine in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle a, b\rangle$ erklärte, nebst ihrer Ableitung stetige, positive Funktion, $k(x)$ eine beliebige stetige Funktion, λ ein reeller Parameter. Als das Sturm-Liouvillesche Problem bezeichnet man die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+\lambda k y=0 \tag{1}$$

unter Zugrundelegung der Randbedingungen

$$\begin{gathered}\alpha y'(a)-\beta y(a)=0, \quad \gamma y'(b)+\delta y(b)=0,\\ \beta>0, \quad \delta>0, \quad \alpha\geqq 0, \quad \gamma\geqq 0, \quad \alpha+\gamma>0\end{gathered} \tag{2}$$

und Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen. Der Ausgangspunkt ist die Auflösung des Randwertproblems

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+\lambda k y=h, \quad h \text{ in } \langle a, b\rangle \text{ stetig}, \tag{3}$$

wobei in den beiden Endpunkten des Intervalls $\langle a, b\rangle$ die Bedingungen (2) erfüllt sein sollen. In bekannter Weise gelangt man unter Benutzung eines Greenschen Ansatzes zu einer Integralgleichung, die, falls k in $\langle a, b\rangle$ das Vorzeichen an einer endlichen Anzahl von Stellen wechselt, dem polaren Typus angehört. Man kann aber auch von (1) direkt zu einem Eigenwertproblem der unendlichen Matrizen kommen. Die Hilbertsche Theorie orthogonaler vollstetiger quadratischer Formen führt ohne Mühe zu ziemlich weitgehenden Resultaten[1]).

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Zur Analysis der unendlichvielen Variablen. I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **38** (1914), S. 113–166.

Dies alles bleibt unverändert in Kraft, auch wenn $\frac{dp}{dx}$ in $\langle a, b\rangle$ lediglich abteilungsweise stetig ist, wobei nach wie vor durchweg $p > 0$ gilt. Desgleichen dürfen k und h abteilungsweise stetig[2]) angenommen werden.

In den folgenden Zeilen werden wir zeigen, daß *das uns jetzt interessierende Randwertproblem sich fast unmittelbar auf das erste Randwertproblem einer mit* (3) *nahe zusammenhängenden Differentialgleichung zurückführen läßt.* Dem ersten Randwertproblem entspricht in dem Schema (2) gerade der besondere Fall $\alpha = \gamma = 0$.

Wir führen neue Funktionen $\boldsymbol{p}(x)$, $\boldsymbol{k}(x)$, $\boldsymbol{h}(x)$ durch die Festsetzungen

$$\boldsymbol{p}(x) = \begin{cases} p(a) & \text{für } x \leqq a, \\ p(x) & \text{in } \langle a, b\rangle, \\ p(b) & \text{für } x \geqq b, \end{cases} \qquad \boldsymbol{k}(x) = \begin{cases} k(x) & \text{in } \langle a, b\rangle, \\ 0 & \text{für } x < a \text{ sowie } x > b, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{in } \langle a, b\rangle, \\ 0 & \text{außerhalb von } \langle a, b\rangle \end{cases} \tag{4}$$

ein und betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\boldsymbol{p}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda \boldsymbol{k} y = \boldsymbol{h}. \tag{5}$$

Es möge $y(x)$ irgendeine nebst ihrer Ableitung stetige Lösung dieser Gleichung bezeichnen[3]). Augenscheinlich erfüllt $y(x)$ in $\langle a, b\rangle$ die Differentialgleichung (3). In den beiden unendlichen Intervallen $x < a$ und $x > b$ ist aber $y(x)$ einfach linear, da dort (5) in

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \tag{6}$$

übergeht. Da ferner $\frac{dy}{dx}$ durchweg stetig ist, so gilt

$$y(x) = \begin{cases} y(a) + (x - a)\, y'(a) & \text{für } x \leqq a, \\ y(b) + (x - b)\, y'(b) & \text{für } x \geqq b. \end{cases} \tag{7}$$

Soll nun die Funktion $y(x)$ in $\langle a, b\rangle$ mit der Lösung unseres Randwertproblems übereinstimmen, so muß sie wegen (2) und (7) jenseits des Intervalls $\langle a, b\rangle$ wie folgt beschaffen sein:

$$y(x) = \begin{cases} y(a)\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}(x - a)\right) & \text{für } x \leqq a, \\ y(b)\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}(x - a)\right) & \text{für } x \geqq b. \end{cases} \tag{8}$$

---

[2]) Oder selbst beschränkt und im Lebesgueschen Sinne integrierbar.

[3]) Die Ableitung zweiter Ordnung $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ändert sich in a und b sprungweise.

Augenscheinlich verschwindet $y(x)$ in den beiden entsprechend links von a und rechts von b gelegenen Punkten

$$x_1 = a - \frac{\alpha}{\beta}, \qquad x_2 = a + \frac{\gamma}{\delta}. \tag{9}$$

In den durch die Gleichheitszeichen in (2) charakterisierten Grenzfällen fällt eine dieser beiden Nullstellen mit einem Endpunkte des Intervalls $\langle a, b\rangle$ zusammen.

Die Auflösung des Sturm-Liouvilleschen Randwertproblems ist damit auf die Auflösung des ersten Randwertproblems der Differentialgleichung (5) unter Zugrundelegung des Intervalls $\langle x_1, x_2\rangle$ zurückgeführt. Die Eigenwerte λ_α und Eigenfunktionen $\varphi_\alpha(x)$ des neuen Problems sind in dem Intervalle $\langle a, b\rangle$ mit den gesuchten Eigenwerten und Eigenfunktionen des Sturm-Liouvilleschen Problems identisch.

Bei der Behandlung des Entwicklungssatzes ist zu beachten, daß die Eigenfunktionen, als die zu dem ersten Randwertproblem der Gleichung (5) gehörigen Eigenfunktionen aufgefaßt, ein nicht abgeschlossenes System von Orthogonalfunktionen bilden[4]). Eine jede in $\langle x_1, x_2\rangle$ stetige, in x_1 und x_2 verschwindende Funktion $f(x)$, die daselbst in eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \sin jx \tag{10}$$

mit konvergentem $\sum_{j=1}^{\infty} j^2 f_j^2$ entwickelbar und in $\langle x_1, a\rangle$ und $\langle b, x_2\rangle$ linear ist, gestattet eine Darstellung

$$f(\xi) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(\xi) \int_{x_1}^{x_2} k(x)\, \varphi_\alpha(x)\, f(x)\, dx. \tag{11}$$

Die Reihe (11) konvergiert für alle ξ in $\langle x_1, x_2\rangle$ gleichmäßig[5]).

Es möge jetzt $f(x)$ irgendeine in $\langle a, b\rangle$ erklärte, in eine gleichmäßig konvergente Kosinusreihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)} \cos jx \tag{12}$$

mit konvergentem $\sum j^2 (f^{(j)})^2$ entwickelbare Funktion bezeichnen. Wir denken uns $f(x)$ derart linear in die beiden Intervalle $\langle x_1, a\rangle$ und $\langle b, x_2\rangle$ hinein fortgesetzt, daß $f(x_1) = f(x_2) = 0$ gilt. Die neue, jetzt in $\langle x_1, x_2\rangle$ erklärte Funktion erfüllt dort die soeben angegebenen, für die Darstellbar-

[4]) Da $k(x)$ für $x < a$ und $x > b$ identisch verschwindet. Vgl. loc. cit. [1]) S. 125.

[5]) Vgl. loc. cit. [1]) S. 125–135. Es wird hierbei angenommen, daß $k(x)$ in keinem in $\langle a, b\rangle$ gelegenen Intervalle identisch verschwindet.

keit in der Form (11) notwendigen und hinreichenden Bedingungen[6]). Da nun $k(x)$ für $x < a$ und $x > b$ identisch verschwindet, so kann man für (11) auch setzen

$$f(\xi) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(\xi) \int_a^b k(x) \varphi_\alpha(x) f(x) \, dx . \tag{13}$$

Dies ist aber gerade die gesuchte Entwicklung.

Eine ganz analoge Behandlung gestattet die etwas allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{dy}{dx}\right) + qy + \lambda k y = 0 , \tag{14}$$

unter $q(x)$ eine in $\langle a, b \rangle$ erklärte stetige[7]) Funktion verstanden. Bei dem Übergang zu dem Intervall $\langle x_1, x_2 \rangle$ wird man $q(x)$ außerhalb von $\langle a, b \rangle$ gleich Null setzen. Die Existenz der Eigenwerte und die Gültigkeit des vorstehenden Entwicklungssatzes ist gesichert, wenn $q(x) \leqq 0$ ist, allgemeiner, wenn der zu dem ersten Randwertproblem und dem Intervalle $\langle x_1, x_2 \rangle$ gehörige kleinste positive Eigenwert der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{dy}{dx}\right) + \mu q y = 0 , \tag{15}$$

falls es überhaupt positive Eigenwerte gibt, größer als 1 ist. Diese hinreichende Bedingung kann natürlich auch in der Form ausgesprochen werden, der kleinste etwa vorhandene positive Eigenwert der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{dy}{dx}\right) + \mu q y = 0 , \tag{16}$$

der zu dem Intervalle $\langle a, b \rangle$ und der Sturm-Liouvilleschen Randbedingung (2) gehört, ist größer als 1.

Leipzig, den 11. September 1929.

---

[6]) Die Voraussetzung, daß $\sum_{j=0}^{\infty} j^2 (f^{(j)})^2$ konvergiert, ist nämlich mit der Tatsache gleichwertig, daß $\frac{df(x)}{dx}$ existiert und quadratisch integrierbar ist und überdies $f(x) - f(a) = \int_{\alpha}^{x} \frac{df(x)}{dx} dx$ gilt.

[7]) Allgemeiner abteilungsweise stetige oder auch nur beschränkte, im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion.

(Eingegangen am 11. September 1929.)

Über die Potenzsummation einer Entwicklung nach Hermiteschen Polynomen.

Von

Ch. H. Müntz in Leningrad.

Einleitung.

Unter der Potenzsummation einer Entwicklung

$$U(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

verstehen wir das Abel-Poissonsche Verfahren

$$U(x) = \lim_{\varrho \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n u_n(x) \qquad (0 < \varrho < 1),$$

sofern dasselbe tatsächlich die gegebene Funktion $U(x)$ liefert.

Im Falle der Entwicklung einer vorgeschriebenen Funktion $U(x)$, $-\infty < x < +\infty$, nach Hermiteschen Polynomen liegen insbesondere diesbezügliche Untersuchungen verschiedener Autoren in der Literatur vor (wir erwähnen hier Weyl, Myller-Lebedeff, Kameda, Szegö, Hille). Die im folgenden gegebenen Resultate gehen über das bisherige insofern hinaus, als nicht einmal Endlichkeit und Differentiierbarkeit von $U(x)$ vorausgesetzt werden.

Das gestellte Problem liefert nebenbei die Lösung der Wärmeleitungsgleichung bei gegebenen Anfangsbedingungen für einen beiderseits unendlichen geraden Stab; unsere Hauptformel (6*) erhält so auch ein selbständiges physikalisches Interesse.

§ 1.

Grundformeln.

Die Hermiteschen Polynome $P_n(x)$ seien von vornherein in der durch einen Parameter c erweiterten Gestalt definiert:

$$P_n(x) = P_n(c, x) = e^{c^2 x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-c^2 x^2}, \tag{1}$$

woraus unter anderem in bekannter Weise die Orthogonal- und Normierungseigenschaften folgen:

$$(1^*) \qquad \int_{\infty}^{\infty} e^{-c^2x^2} P_m(c,x) P_n(c,x)\, dx = 0, \qquad \text{für} \quad m \neq n;$$

$$(1_*) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2x^2} P_n(c,x)^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{c} (2c^2)^n \cdot n!$$

Der weiteren Untersuchung legen wir eine explizite Darstellung der Hermiteschen Polynome zugrunde, die von T. Kameda[1]) stammt. Man gehe von der klassischen Laplaceschen Formel aus[2]):

$$(2) \qquad J(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4c^2} + i\xi\alpha}\, d\alpha = \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2\xi^2},$$

für die hier für spätere Zwecke ein einfacher Beweis gegeben sei.

Man hat jedenfalls identisch:

$$(2^*) \qquad 2\pi J(\xi) = e^{-c^2\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha}{2c} - ic\xi\right)^2} d\alpha;$$

geht man nun in die *komplexe* α-Ebene über, so ist nach dem Integralsatz von Cauchy

$$(2_*) \qquad \int e^{-\left(\frac{\alpha}{2c} - ic\xi\right)^2} d\alpha = 0$$

für jede geschlossene Kurve im Endlichen, daher auch etwa bei geradliniger Integration

$$(\overline{2}) \qquad \int_{-M}^{N} + \int_{N}^{N+2ic^2\xi} + \int_{N+2ic^2\xi}^{-M+2ic^2\xi} + \int_{-M+2ic^2\xi}^{-M} = 0.$$

Für $M \to +\infty$ verschwindet das letzte, für $N \to +\infty$ das zweite dieser Integrale; man findet so, wenn $\alpha - 2ic^2\xi = \alpha'$ gesetzt wird:

$$(\underline{2}) \qquad J(\xi) = \frac{1}{2\pi} e^{-c^2\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha'^2}{4c^2}} d\alpha' = \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2\xi^2},$$

w. z. b. w. Durch ersichtlich zulässige Differentiation unter dem Integralzeichen erhält man nunmehr (Kameda, a. a. O.):

$$(3) \qquad \frac{d^n}{d\xi^n}\left(\frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2\xi^2}\right) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2\xi^2} P_n(c,\xi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4c^2} + i\xi\alpha} (i\alpha)^n\, d\alpha.$$

---

[1]) Journal of Science **1**, Tokio 1925.

[2]) Die Hinzunahme des Faktors $\frac{1}{2\pi}$ führt rechts auf die Gaußsche Fehlerfunktion, was für die wahrscheinlichkeitstheoretischen Anwendungen von Belang ist.

Gemäß dem obigen, hier nur entsprechend zu modifizierenden Beweise für (2) gilt also auch:

$$(3^*) \qquad 2\pi P_n(c,\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{c}\int_{-\infty}^{\infty} c^{-\frac{\alpha'^2}{4c^2}}(i\alpha' - 2c^2\xi)^n\, d\alpha',$$

worin übrigens der Polynomcharakter von $P_n(c,\xi)$ in ξ deutlich zum Ausdruck kommt.

Die Entwicklung einer gegebenen Funktion $U(x)$ nach Hermiteschen Polynomen erfolgt nun formal in bekannter Weise. Unter Zugrundelegung von (3) ist dann das allgemeine Glied der Entwicklung:

$$(4) \qquad u_n(x) = A_n P_n(c,x)$$

$$= \frac{(2c^2)^{-n}}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}(i\alpha)^n e^{-\frac{\alpha^2}{4c^2}+i\alpha\xi}\,d\alpha\cdot\frac{e^{c^2x^2}}{2\sqrt{\pi}c}\int_{-\infty}^{\infty}(i\beta)^n e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}+i\beta x}\,d\beta,$$

was man nach (3*) auch so schreiben kann:

$$(4^*) \qquad 4\pi^{\frac{3}{2}} c\, u_n(x) = \frac{(2c^2)^{-n}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi)\, e^{-c^2\xi^2}\,d\xi$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4c^2}}(i\alpha - 2c^2\xi)^n\,d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2}{4c^2}}(i\beta - 2c^2x)^n\,d\beta.$$

§ 2.

Das Poissonsche Summationsverfahren.

Aus der Theorie der Fourierreihen kennt man den fundamentalen, mit dem Poissonschen Integral eng zusammenhängenden Satz, wonach unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$$

die Grenzformel gilt:

$$f(x) = \lim_{\varrho\to 1}\left\{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\varrho^n(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right\}.$$

Bevor wir die analoge Formel für allgemeine Hermitesche Entwicklungen herleiten, sei vor allem bemerkt, daß hier schon a priori gewisse Bedingungen für ein $U(x)$ gefordert werden müssen, von dem die Koeffizienten A_n in (4) herstammen sollen. Denn zunächst ist wegen (1*):

$$(4_*) \qquad A_n = \frac{(2c^2)^{-n}}{n!}\cdot 2\sqrt{\pi}c\int_{\infty}^{\infty} e^{-c^2\xi^2}P_n(c,\xi)\,U(\xi)\,d\xi.$$

Die $P_n(c,\xi)$ sind hierbei Polynome in ξ, die Angabe aller A_n bedeutet daher das Vorliegen des entsprechenden Momentenproblems für

$F(\xi) = e^{-c^2\xi^2} U(\xi)$; es ist aber bekannt (Stieltjes), daß es Nullfunktionen $u_0(\xi) \not\equiv 0$ gibt, deren alle Momente verschwinden. Ohne gewisse einschränkende Bedingungen für $U(\xi)$ würde also das Problem der Bestimmung aus den A_n nicht einmal eindeutig sein: ein Analogon des Cantorschen Eindeutigkeitssatzes aus der Theorie der Fourierreihen besteht hier demnach nicht.

Wir setzen jetzt fest, es möge

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(\xi)|\, d\xi = U_0 < \infty \tag{5}$$

existieren. Es folgt dann aus (4):

$$4\pi^{\frac{3}{2}} c\, e^{-c^2x^2} \left| \sum_0^N \varrho^n u_n(x) \right| \leqq \sum_0^N \frac{(2c^2)^{-n}}{n!} U_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\varrho\alpha\beta)^n e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4c^2}} d\alpha\, d\beta \tag{5*}$$

$$= \sum_0^N \frac{(2c^2)^{-n}\varrho^n}{n!} U_0 \cdot (4c^2)^{n+1} \cdot \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^2;$$

nun ist nach der Stirlingschen Formel, mit hinreichend weit angesetzten Restgliedern:

$$\log \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n}{2} \log \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{2} + \ldots;$$

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \ldots;$$

$$\log \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{n!} = \frac{1}{2} \log n + \text{höhere Glieder in } n^{-1};$$

$\varrho^n u_n(x)$ erweist sich also absolut kleiner als $U_0^* \frac{\varrho^n}{\sqrt{n}}$, mit einer passenden Konstanten U_0^*, was für $|\varrho| < 1$ natürlich zur absoluten Konvergenz in (5*) bei $N \to \infty$ führt. Es folgt daher aus (4) durch erlaubte Vertauschung von Summation und Integration:

$$4\pi^{\frac{3}{2}} c \cdot e^{-c^2x^2} \sum_0^{\infty} \varrho^n u_n(x) \tag{6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi)\, d(\xi) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varrho\alpha\beta}{2c^2}} \cdot e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4c^2} + i\alpha\xi + i\beta x}\, d\alpha\, d\beta.$$

Die Integration nach β kann hier sofort ausgeführt werden; sie liefert:

$$e^{-\left(cx + \frac{i\varrho\alpha}{2c}\right)^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\beta'}{2c} + \frac{\varrho\alpha}{2c} - cix\right)^2} d\beta' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta'^2}{4c^2}} d\beta' = 2c\sqrt{\pi} \right\},$$

somit, in analoger Weiterführung:

$$2\pi \sum_0^\infty \varrho^n u_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi)\, d\xi \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1-\varrho^2)\alpha^2}{4c^2} + i\alpha(\xi - \varrho x)} d\alpha \right.$$

$$\left. = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\sqrt{1-\varrho^2}\frac{\alpha}{2c} - i\frac{c}{\sqrt{1-\varrho^2}}(\xi-\varrho x)\right]^2 - \frac{c^2}{1-\varrho^2}(\xi-\varrho x)^2} d\alpha = e^{-\frac{c^2}{1-\varrho^2}(\xi-\varrho x)^2} \cdot \frac{2c}{\sqrt{1-\varrho^2}}\sqrt{\pi} \right\}.$$

Setzt man nun

$$\xi = \varrho x + \sqrt{1-\varrho^2}\,\eta,$$

so erhält man demnach:

$$(6^*) \qquad \sum_0^\infty \varrho^n u_n(x) = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\varrho x + \sqrt{1-\varrho^2}\,\eta)\, e^{-c^2\eta^2} d\eta$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta_0} U(\varrho x + \sqrt{1-\varrho^2}\,\eta)\, e^{-c^2\eta^2} d\eta + \int_{\eta_0}^{\infty} \dots \right\},$$

wobei η_0 so gewählt sein möge, daß das Argument von U im ersten Teil $\leqq x$, im zweiten $\geqq x$ ausfällt, also:

$$(6_*) \qquad \varrho x + \sqrt{1-\varrho^2}\,\eta_0 = x, \qquad \eta_0 = \sqrt{\frac{1-\varrho}{1+\varrho}}\, x;$$

für $\varrho \to 1$ ist natürlich $\eta_0 \to 0$.

Es sei zunächst x ein Stetigkeits- bzw. ein gewöhnlicher Unstetigkeitspunkt von $U(x)$, so daß sowohl $U(x-0)$ wie $U(x+0)$ existieren und *endlich* sind; man kann dann zu einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\bar{\delta} > 0$ und ein $\overset{+}{\delta} > 0$ von der Beschaffenheit angeben, daß

$$(7) \qquad \begin{aligned} &|U(x-\delta) - U(x-0)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqq \delta \leqq \bar{\delta}, \\ &|U(x+\delta) - U(x+0)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqq \delta \leqq \overset{+}{\delta}. \end{aligned}$$

Dann ist, mit $\varrho x + \sqrt{1-\varrho^2}\,\bar{\eta}_0 = x - \bar{\delta}$, $\bar{\eta}_0 = \eta_0 - \frac{\bar{\delta}}{\sqrt{1-\varrho^2}}$,

$$(7^*) \qquad \int_{-\infty}^{\eta_0} \frac{c}{\sqrt{\pi}} [U(\varrho x + \sqrt{1-\varrho^2}\,\eta) - U(x-0)]\, e^{-c^2\eta^2} d\eta = \int_{-\infty}^{\bar{\eta}_0} + \int_{\bar{\eta}_0}^{\eta_0};$$

für $\varrho \to 1$ hat man aber

$$\bar{\eta}_0 \to -\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\bar{\eta}_0} \to 0,$$

während

$$\left| \int_{\bar{\eta}_0}^{\eta_0} \right| \leqq \frac{c}{\sqrt{\pi}}\, \varepsilon \int_{\bar{\eta}_0}^{\eta_0} e^{-c^2\eta^2} d\eta \to \frac{1}{2}\,\varepsilon$$

ist. Es folgt demnach für $\varrho \to 1$:

$$(8) \qquad \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\eta_0} U(\varrho x + \sqrt{1-\varrho^2}\,\eta)\, e^{-c^2\eta^2} d\eta \to \frac{1}{2} U(x-0),$$

und genau in der gleichen Weise:

$$(8^*) \qquad \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta_0}^{\infty} U(\varrho x + \sqrt{1-\varrho^2}\,\eta)\, e^{-c^2\eta^2} d\eta \to \frac{1}{2} U(x+0),$$

mithin wegen (6) als Schlußresultat:

$$(8_*) \qquad \lim_{\varrho=1} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n u_n(x) = \frac{1}{2}[U(x+0) + U(x-0)],$$

w. z. b. w.

Man ersieht mit den gleichen Mitteln, daß die obige Schlußweise unverändert bleibt, wenn etwa $U(x-0) = -\infty$ bzw. $= +\infty$, $U(x+0)$ aber endlich ist, oder umgekehrt; ebenso, wenn $U(x-0)$ und $U(x+0)$ *beide* gegen $-\infty$ bzw. *beide* gegen $+\infty$ gehen; für $U(x-0) = -\infty$, $U(x+0) = +\infty$ dagegen, oder umgekehrt, ergibt sich freilich keine bestimmte Aussage mehr. In *allen* Fällen also, wo $U(x-0)$ und $U(x+0)$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existieren, läßt sich die Gültigkeit des Poissonschen Summationsverfahrens (8_*) zunächst aussprechen, sobald $\int_{-\infty}^{\infty} |U(\xi)|\, d\xi = U_0$ endlich ist.

(Eingegangen am 16. Juli 1929.)

Abschätzungen für die Ableitungen einer reellen Funktion eines reellen Arguments.

Von

Ludwig Neder in Münster (Westf.).

(𝔄) *Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion eines reellen Arguments, definiert in einem Intervall $a \leqq x \leqq a + L$ und daselbst beliebig oft differentiierbar. Wir setzen*

$$M_\nu = \max_{a \leqq x \leqq a+L} |f^{(\nu)}(x)| \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dann sind eine Reihe von Sätzen bekannt, welche gestatten, M_1 durch M_0 und M_2 abzuschätzen. Von diesen interessieren hier nur solche, die frei sind von einschränkenden Voraussetzungen über die Länge L des zugrunde gelegten Intervalls. Es kommt dann nur ein von Herrn Hadamard[1]) herrührender Satz in Frage, welcher lautet: Unter der Voraussetzung (𝔄) ist stets

$$M_1 \leqq 2 L^{-1} M_0 + \frac{1}{2} L M_2 .$$

Diesen Satz wollen wir nachstehend so verallgemeinern, daß er ein beliebiges M_k mit $k > 0$ durch M_0 und ein M_n mit $n > k$ abzuschätzen gestattet. Ferner wollen wir von diesem verallgemeinerten Satz Anwendungen machen auf den Verlauf der Ableitungen einer für $b \leqq x < \infty$ unbegrenzt differentiierbaren Funktion $f(x)$ bei $x \to \infty$.[2])

Satz 0. *Unter der Voraussetzung (𝔄) gilt stets die Abschätzung*

$$(1) \qquad M_k \leqq (2n)^{2n} L^{-k} M_0 + L^{n-k} M_n \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Beweis. Wir werden ein wenig schärfer rechnen, als es zum Beweise der Behauptung nötig ist, um eine etwas genauere Abschätzung heraus-

[1]) Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées, Comptes rend. Soc. math. de Fr. 1914, S. 68—72; vgl. S. 69.

[2]) Vgl. die Angaben, die sich nach dem Beweise des Satzes 0 finden.

zuholen. Im übrigen legen wir jedoch hier keinen Wert auf die Schärfe der Abschätzung, da die Ungleichung (1) für unsere Zwecke vollkommen ausreicht.

Wir teilen das Intervall $[a, a+L]$ zunächst in $n-k$ gleiche Teile i_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, n-k)$ und darauf die linke Hälfte jedes Teils nochmals in k gleiche Teile, deren Endpunkte $x_{\mu,0}, x_{\mu,1}, \ldots, x_{\mu,k}$ heißen sollen.

Aus den zu diesen Punkten gehörigen Werten unserer Funktion bilden wir bei dem konstanten Zuwachs $\frac{L}{2k(n-k)}$ die k-te Differenz

$$\Delta^k f(x_{\mu,0}) = \sum_{\varkappa=0}^{k} (-1)^{k-\varkappa} \binom{k}{\varkappa} f(x_{\mu,\varkappa}). \tag{2}$$

Für diese gilt bekanntlich die Beziehung

$$\Delta^k f(x_{\mu,0}) = \left(\frac{L}{2k(n-k)}\right)^k \cdot f^{(k)}(\xi_\mu) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n-k), \tag{3}$$

wo ξ_μ in der linken Hälfte des Teils i_μ gelegen ist, so daß der Abstand zweier ξ_μ mit verschiedenen Indizes stets größer gleich der halben Länge eines i_μ ausfällt:

$$|\xi_{\mu'} - \xi_{\mu''}| \geqq \frac{L}{2(n-k)}, \qquad \mu' \neq \mu''. \tag{4}$$

Aus (2) und (3) folgt wegen $|f(x_{\mu,\varkappa})| \leqq M_0$:

$$|f^{(k)}(\xi_\mu)| = \left(\frac{2k(n-k)}{L}\right)^k \cdot |\Delta^k f(x_{\mu,0})| \leqq \left(\frac{2k(n-k)}{L}\right)^k \cdot 2^k M_0 \tag{5}$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, n-k).$$

Nunmehr wenden wir die Lagrangesche Interpolationsformel mit Restglied

$$F(x) = \sum_{\mu=1}^{m}{}' \left\{\frac{x-\xi_1}{\xi_\mu-\xi_1} \cdots \frac{x-\xi_m}{\xi_\mu-\xi_m}\right\}_\mu \cdot F(\xi_\mu) + \frac{(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_m)}{m!} F^{(m)}(\xi)$$

(der Index μ der geschweiften Klammer bedeutet Weglassung des μ-ten Faktors) an mit $m = n-k$, $F(x) = f^{(k)}(x)$ und unseren ξ_μ. Es ergibt sich dann

$$f^{(k)}(x) = \sum_{\mu=1}^{n-k}{}' \left\{\frac{x-\xi_1}{\xi_\mu-\xi_1} \cdots \frac{x-\xi_{n-k}}{\xi_\mu-\xi_{n-k}}\right\}_\mu \cdot f^{(k)}(\xi_\mu) + \frac{(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_{n-k})}{(n-k)!} f^{(n)}(\xi), \tag{6}$$

wo bei $a \leqq x \leqq a+L$ auch ξ in $[a, a+L]$ gelegen ist, so daß

$$|f^{(n)}(\xi)| \leqq M_n. \tag{7}$$

Daher folgt aus (6) für $a \leqq x \leqq a+L$ wegen (4), (5) und (7) bei rohester Abschätzung

$$|f^{(k)}(x)| \leqq (n-k) \cdot \left(\frac{L}{2(n-k)}\right)^{n-k-1} \cdot \left(\frac{2k(n-k)}{L}\right)^k \cdot 2^k M_0 + \frac{L^{n-k}}{(n-k)!} M_n,$$

also

$$M_k \leqq 2^{n+k-1} k^k (n-k)^n L^{-k} M_0 + \frac{L^{n-k}}{(n-k)!} M_n,$$

woraus durch naheliegende Verschlechterung die Behauptung hervorgeht.

Den hiermit bewiesenen Satz 0 wollen wir jetzt anwenden auf folgendes Problem, das von den Herren Hardy und Littlewood angegriffen worden ist:

(𝔓)

Voraussetzung. *Es sei die Funktion $f(x)$ unbegrenzt differentiierbar im Intervall $b \leqq x < \infty$, n eine natürliche Zahl $\geqq 2$, sowie*

(8) $\quad f(x) = O(\varphi(x)), \quad f^{(n)}(x) = O(\psi(x))$ *bei* $x \to \infty$,

wo die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ für $c \leqq x < \infty$ erklärt, positiv und monoton sind. Es ist also

(9) $\quad |f(x)| < A\varphi(x), \quad |f^{(n)}(x)| < B\psi(x)$ *für* $x \geqq d$,

wo $d \geqq \max(b, c)$ ist.

Frage. *Unter welchen Voraussetzungen über die Art der Monotonie von $\varphi(x)$, $\psi(x)$ kann man bei $x \to \infty$ die Größenordnung von*

$$f^{(k)}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

abschätzen?

Es sind nämlich vier Fälle möglich:

1. $\varphi(x)$, $\psi(x)$ beide nirgends zunehmend,
2. $\varphi(x)$, $\psi(x)$ beide nirgends abnehmend,
3. $\varphi(x)$ nirgends abnehmend, $\psi(x)$ nirgends zunehmend,
4. $\varphi(x)$ nirgends zunehmend, $\psi(x)$ nirgends abnehmend.

Die Herren Hardy und Littlewood haben durch eine sehr interessante Schlußweise bewiesen[3]), daß im zweiten Fall

$$f^{(k)}(x) = O(\varphi(x)^{1-k/n} \psi(x)^{k/n})$$

ist, und durch das Beispiel[4])

(10) $\quad n = 2, \quad k = 1, \quad f(x) = x \log x - x, \quad \varphi(x) = x \log x, \quad \psi(x) = \frac{1}{x}$

mit

$$f'(x) = \log x \neq O(\varphi(x)^{1/2} \psi(x)^{1/2})$$

gezeigt, daß diese Behauptung im dritten Falle nicht stets aufrechterhalten werden kann, während sie auf die übrigen beiden Fälle nicht eingehen.

[3]) Contributions to the arithmetic theory of series, Proc. Lond. math. Soc. (2) **11** (1922), S. 411—478; vgl. S. 422 ff.

[4]) Ebenda, vgl. S. 419.

Wir wollen nun nachstehend auf Grund unseres Satzes 0 alle vier Fälle auf einem einheitlichen Wege erledigen und werden zu einem in den ersten drei Fällen abschließenden, im vierten Falle befriedigenden Resultat gelangen. Den Hardy-Littlewoodschen Satz beweisen wir dabei als Satz 2 aufs neue.

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen des Problems* $(\mathfrak{P})$ *und falls* $\varphi(x), \psi(x)$ *beide nirgends zunehmend sind, gilt die Beziehung*

$$f^{(k)}(x) = O\left(\varphi(x)^{1-k/n}\psi(x)^{k/n}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Beweis. Wir legen bei $x > d$ an den Punkt x nach rechts das Intervall der Länge $L = \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}$ und wenden darauf die Ungleichung (1) an. Es wird wegen (9) und der Monotonie von $\varphi(x), \psi(x)$:

$$M_0 \leqq A\varphi(x), \qquad M_n \leqq B\psi(x),$$

und daher

$$|f^{(k)}(x)| \leqq M_k \leqq (2n)^{2n}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{-k/n} \cdot A\varphi(x) + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1-k/n} \cdot B\psi(x)$$
$$= O\left(\varphi(x)^{1-k/n}\psi(x)^{k/n}\right).$$

Daß der hiermit bewiesene Satz nicht in allen Fällen verschärft werden kann, zeigt das triviale Beispiel

$$n = 2, \quad k = 1, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x}, \quad \psi(x) = \frac{1}{x^3},$$

bei welchem

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \sim \varphi(x)^{1/2}\psi(x)^{1/2}.$$

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des Problems* $(\mathfrak{P})$ *und falls* $\varphi(x), \psi(x)$ *beide nirgends abnehmend sind, gilt die Beziehung*

$$f^{(k)}(x) = O\left(\varphi(x)^{1-k/n}\varphi(x)^{k/n}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Beweis. Wir dürfen vor allen Dingen annehmen, daß der Zahl d aus (9) noch die Bedingung $f(d) \neq 0$ auferlegt werden kann. Denn sonst wäre $f(x) = 0$ für alle großen x und die Behauptung evident. Da die Funktion $\varphi(x)$ der Voraussetzung eventuell unnötig groß gewählt ist für unsere Zwecke, ersetzen wir sie zunächst durch die gleichfalls positive, nirgends abnehmende Funktion

$$\bar{\varphi}(x) = \max_{d \leqq u \leqq x} |f(u)| \quad \text{bei} \quad x \geqq d.$$

Wird dieses Maximum im Punkte $\bar{x}$ angenommen, $d \leqq \bar{x} \leqq x$, so hat man nach Taylor

$$f(\bar{x}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(\bar{x}-d)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(d) + \frac{(\bar{x}-d)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \text{wo} \quad d \leqq \xi \leqq \bar{x} (\leqq x),$$

und daher

$$\bar{\varphi}(x) = |f(\bar{x})| \leqq O((x-d)^{n-1}) + \frac{(x-d)^n}{2} \cdot B\,\psi(\xi)$$

$$\leqq O((x-d)^{n-1}) + \frac{(x-d)^n}{2} \cdot B\,\psi(x),$$

was $< (x-d)^n \cdot B\,\psi(x)$ ist für alle großen x. Für diese wird also

$$\left(\frac{1}{B}\,\frac{\bar{\varphi}(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n} < x - d\,,$$

so daß dann das an den Punkt x nach links angelegte Intervall der Länge $L = \left(\frac{1}{B}\,\frac{\bar{\varphi}(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}$ ganz rechts vom Punkte d liegt. Wenden wir auf dieses Intervall wieder die Ungleichung (1) an, so wird diesmal

$$M_0 \leqq \bar{\varphi}(x), \qquad M_n \leqq B\,\psi(x).$$

Und wir erhalten

$$|f^{(k)}(x)| \leqq M_k \leqq (2n)^{2n} \left(\frac{1}{B}\,\frac{\bar{\varphi}(x)}{\psi(x)}\right)^{-k/n} \cdot \bar{\varphi}(x) + \left(\frac{1}{B}\,\frac{\bar{\varphi}(x)}{\psi(x)}\right)^{1-k/n} \cdot B\,\psi(x)$$

$$= O(\bar{\varphi}(x)^{1-k/n}\,\psi(x)^{k/n}),$$

woraus wegen

$$\bar{\varphi}(x) = |f(\bar{x})| \leqq A\,\varphi(\bar{x}) \leqq A\,\varphi(x)$$

die Behauptung folgt.

Auch dieser hiermit bewiesene Satz kann nicht in allen Fällen verschärft werden, wie das triviale Beispiel

$$n = 2, \quad k = 1, \quad f(x) = x^2, \quad \varphi(x) = x^2, \quad \psi(x) = 1$$

zeigt, bei welchem

$$f'(x) = 2x \sim \varphi(x)^{1/2}\,\varphi(x)^{1/2}.$$

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen des Problems* $(\mathfrak{P})$ *und falls* $\varphi(x)$ *nirgends abnehmend,* $\psi(x)$ *nirgends zunehmend ist, gilt die Beziehung*

$$f^{(k)}(x) = O\left\{\varphi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right) \cdot \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{-k/n}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Beweis. Wie im Beweise des Satzes 1 legen wir bei $x > d$ an den Punkt x nach rechts das Intervall der Länge $L = \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}$ an und unterwerfen dasselbe unserer Ungleichung (1). Es wird dann

$$M_0 \leqq A\,\varphi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right), \qquad M_n \leqq B\,\psi(x)$$

und daher

$$|f^{(k)}(x)| \leqq M_k \leqq (2n)^{2n} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{-k/n} \cdot A\,\varphi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right) + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1-k/n} \cdot B\,\psi(x),$$

woraus wegen

$$\varphi(x) \leqq \varphi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right)$$

die Behauptung folgt.

Auch dieser Satz kann nicht in allen Fällen verschärft werden; speziell kann der Zuwachs $\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}$ im Argument des ersten Faktors der Vergleichsfunktion unter dem O nicht wesentlich verkleinert werden. Beides zeigt das obige Hardy-Littlewoodsche Beispiel (10), bei welchem

$$\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n} = x\sqrt{\log x}, \quad \text{also} \quad \varphi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right) \sim x\sqrt{\log x}\cdot\log x$$

wird, so daß $f'(x)$ gerade von derselben Größenordnung ist wie die Vergleichsfunktion unter dem O der Behauptung

Es ist jedoch eine interessante Frage, ob es nicht eine einfache, der Funktion $\varphi(x)$ aufzuerlegende Bedingung gibt, die gestattet, die komplizierte Behauptung des Satzes 3 durch die einfachere der Sätze 1 und 2 zu ersetzen. Eine solche wird durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 3*. *Unter den Voraussetzungen des Problems* ($\mathfrak{P}$) *und falls* $\varphi(x)$ *nirgends abnehmend,* $\psi(x)$ *nirgends zunehmend ist, sowie, bei konstantem* K,

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^{1-1/n}\,\psi(x)^{1/n}} < K \text{ für alle großen } x, \tag{11}$$

gilt die Beziehung

$$f^{(k)}(x) = O\left(\varphi(x)^{1-k/n}\,\psi(x)^{k/n}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Beweis. Ersetzen wir zunächst die Funktion $\psi(x)$ der Voraussetzung (8) durch die positive, gleichsinnig monotone Funktion

$$\overline{\psi}(x) = K^n\,\psi(x),$$

so haben wir

$$f(x) = O(\varphi(x)), \quad f^{(n)}(x) = O(\overline{\psi}(x)) \quad \text{bei} \quad x \to \infty,$$

also nach Satz 3:

$$f^{(k)}(x) = O\left\{\varphi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\overline{\psi}(x)}\right)^{1/n}\right)\cdot\left(\frac{\varphi(x)}{\overline{\psi}(x)}\right)^{-k/n}\right\}. \tag{12}$$

Weiter hat man wegen (11) für alle großen x

$$\frac{1}{n}\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^{1+1/n}} \leqq \frac{K\psi(x)^{1/n}}{n\varphi(x)^{2/n}} \leqq \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\psi}(x)^{1/n}}{\varphi(x)^{2/n}}$$

und daher ebenda, wenn $h = \left(\frac{\varphi(x)}{\overline{\psi}(x)}\right)^{1/n}$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi(x)^{1/n}} - \frac{1}{\varphi(x+h)^{1/n}} &= h\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\varphi'(x+\vartheta h)}{\varphi(x+\vartheta h)^{1+1/n}} \qquad (0<\vartheta<1)\\ &\leqq \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\psi}(x+\vartheta h)^{1/n}}{\varphi(x+\vartheta h)^{2/n}}\cdot\left(\frac{\varphi(x)}{\overline{\psi}(x)}\right)^{1/n}\\ &\leqq \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\psi}(x)^{1/n}}{\varphi(x)^{2/n}}\cdot\frac{\varphi(x)^{1/n}}{\overline{\psi}(x)^{1/n}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varphi(x)^{1/n}},\end{aligned}$$

also

$$\varphi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right) = \varphi(x+h) \leqq 2^n \varphi(x).$$

Aus (12) folgt somit

$$f^{(k)}(x) = O\left\{2^n \varphi(x) \cdot \varphi(x)^{-k/n} \cdot K^k \psi(x)^{k/n}\right\},$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist.

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen des Problems* ($\mathfrak{P}$) *und falls* $\varphi(x)$ *nirgends zunehmend,* $\psi(x)$ *nirgends abnehmend ist, gilt die Beziehung*

$$f^{(k)}(x) = O\left\{\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1-k/n} \cdot \psi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right)\right\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Beweis. Wir gehen ebenso vor wie beim Beweis der Sätze 1 und 3; wir haben diesmal

$$M_0 \leqq A\varphi(x), \qquad M_n \leqq B\psi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right)$$

und daher nach Ungleichung (1):

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leqq M_k \leqq (2n)^{2n}\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{-k/n} \cdot A\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\psi(x) + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1-k/n} \cdot B\psi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right)$$

woraus wegen

$$\psi(x) \leqq \psi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right)$$

die Behauptung folgt.

Damit ist Satz 4 bereits bewiesen. Während es nun beim Satz 3 leicht war, ein Beispiel anzugeben, wo die Aussage des Satzes nicht durch eine schärfere ersetzt werden konnte, gibt es zum Satz 4 kein ähnlich einfaches Beispiel.

Es greift nämlich die Theorie der wachsenden Funktionen in folgender Weise in unser Problem ein: Wenn wir uns auf den Unterfall $\varphi(x) \to 0$, $\psi(x) \to \infty$ bei $x \to \infty$ beschränken[5]), so ist zunächst für alle großen x

$$\psi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right) \leqq \psi\left(x + \frac{1}{\psi(x)^{1/n}}\right).$$

[5]) Anderenfalls ist entweder $\varphi(x)$ nicht $\to 0$ bei $x \to \infty$ und

$$f(x) = O(1), \qquad f^{(n)}(x) = O(\psi(x)),$$

und daher nach Satz 2:

$$f^{(k)}(x) = O\left(1^{1-k/n}\psi(x)^{k/n}\right), \quad \text{also} \quad = O\left(\varphi(x)^{1-k/n}\psi(x)^{k/n}\right),$$

letzteres, weil $1 = O(\varphi(x))$. Oder es ist $\psi(x)$ nach oben beschränkt und

$$f(x) = O(\varphi(x)), \qquad f^{(n)}(x) = O(1),$$

und daher nach Satz 1

$$f^{(k)}(x) = O\left(\varphi(x)^{1-k/n}1^{k/n}\right), \text{ also } = O\left(\varphi(x)^{1-k/n}\psi(x)^{k/n}\right).$$

Nun geht aus einer Untersuchung des Herrn Borel hervor[6]), daß bei für $c \leqq x < \infty$ positivem, nirgends abnehmendem $M(x) \to \infty$ die Beziehung

$$M\left(x + \frac{1}{[\log M(x)]^{1/n}}\right) \leqq M(x)^2$$

von c bis ∞ überall gilt, bei Ausnahme einer Intervallmenge von endlicher Gesamtlänge. Wendet man diesen Satz bei unserem $\psi(x)$ an mit $M(x) = e^{\psi(x)}$, so ergibt sich, daß die Beziehung

$$\psi\left(x + \frac{1}{\psi(x)^{1/n}}\right) \leqq 2\,\psi(x)$$

von c bis ∞ überall gilt, bei Ausnahme einer ebensolchen Intervallmenge. Daher läßt sich mit Rücksicht auf Anmerkung [5]) im Falle des Satzes 4 behaupten, daß eine Abschätzung

$$|f^{(k)}(x)| < \text{const.}\ \varphi(x)^{1-k/n}\,\psi(x)^{k/n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{13}$$

von c bis ∞ überall besteht, bei Ausnahme einer Intervallmenge von endlicher Gesamtlänge. Und hieraus dürfte hervorgehen, daß einfache Beispiele für die Nichtverschärfbarkeit des Satzes 4 nicht existieren. Man müßte vielmehr schon zu Funktionen $f(x)$ greifen, die nur in dünngesäten Ausnahmeintervallen rasch und sonst relativ langsam anwachsen.

Wir wollen nun noch eine weite Klasse von Funktionen $\psi(x)$ herausstellen, für welche die Behauptung des Satzes 4 von einer gewissen Stelle ab ausnahmslos durch die schärfere Beziehung (13) ersetzt werden kann, also durch die Behauptung der Sätze 1, 2 und 3*:

Satz 4*. *Unter den Voraussetzungen des Problems* ($\mathfrak{P}$) *und falls* $\varphi(x)$ *nirgends zunehmend,* $\psi(x)$ *nirgends abnehmend ist, sowie, bei konstantem* K,

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)^{1+1/n}} < K \quad \textit{für alle großen } x,$$

gilt die Beziehung

$$f^{(k)}(x) = O\left(\varphi(x)^{1-k/n}\,\psi(x)^{k/n}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Beweis. Wenn $\varphi(x)$ nicht $\to 0$ bei $x \to \infty$, geht die Behauptung aus der ersten Hälfte der Fußnote [5]) hervor. Wir dürfen also $\varphi(x) \to 0$ voraussetzen und haben dann bei $h = \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}$ für alle großen x:

$$\frac{1}{\psi(x)^{1/n}} - \frac{1}{\psi(x+h)^{1/n}} = h \cdot \frac{1}{n}\,\frac{\psi'(x+\vartheta h)}{\psi(x+\vartheta h)^{1+1/n}} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

$$\leqq \frac{K}{n} \cdot h = \frac{K}{n} \cdot \frac{\varphi(x)^{1/n}}{\psi(x)^{1/n}} \leqq \frac{1}{2}\,\frac{1}{\psi(x)^{1/n}},$$

[6]) Sur les zéros des fonctions entières, Acta math. **20** (1897), S. 357–396; vgl. S. 375 ff.

so daß wir erhalten

$$\psi\left(x + \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}\right) = \psi(x+h) \leqq 2^n \psi(x).$$

Und es folgt jetzt die Behauptung aus der des Satzes 4.

Daß der hiermit bewiesene Satz 4* nicht in allen Fällen verbessert werden kann, zeigt das Beispiel

$$n = 2, \quad k = 1, \quad f(x) = e^{-x} \sin e^x, \quad \varphi(x) = e^{-x}, \quad \psi(x) = e^x,$$

bei welchem

$$|f'(x)| = |\cos e^x - e^{-x} \sin e^x| \geqq \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \varphi(x)^{1/2} \psi(x)^{1/2}$$

ausfällt für beliebig große x.

Bisher haben wir nur Sätze gebracht, in denen O allein auftrat. Nunmehr kommen wir zu Sätzen, in denen auch o eine Rolle spielt.

Und zwar wollen wir die Voraussetzung (8) des Problems ($\mathfrak{P}$) so modifizieren, daß wir jetzt voraussetzen

(8a) $$f(x) = o(\varphi(x)), \quad f^{(n)}(x) = O(\psi(x)) \quad \text{bei} \quad x \to \infty$$

bzw.

(8b) $$f(x) = O(\varphi(x)), \quad f^{(n)}(x) = o(\psi(x)) \quad \text{bei} \quad x \to \infty,$$

wie es die Herren Hardy und Littlewood[3]) bereits getan haben. Es ist dann die mit (8) äquivalente Formulierung (9) bei gegebenem $\delta > 0$ zu ersetzen durch

(9a) $$|f(x)| < \delta \varphi(x), \quad |f^{(n)}(x)| < B \psi(x) \quad \text{für} \quad x \geqq d = d(\delta)$$

bzw.

(9b) $$|f(x)| < A\varphi(x), \quad |f^{(n)}(x)| < \delta \psi(x) \quad \text{für} \quad x \geqq d = d(\delta).$$

Also modifizieren sich auch die Voraussetzungen unserer Sätze entsprechend, und man darf erwarten, daß in den zugehörigen Behauptungen das O durch o ersetzt werden kann.

Diese Erwartung wollen wir nachstehend im Falle des Satzes 1 bestätigen. Der Fall des Satzes 2 ist bereits durch die Herren Hardy und Littlewood[3]) erledigt. Auf die Modifikationen der übrigen Sätze gehen wir hier nicht ein.

Satz 1a. *Unter der gemäß* (8a) *oder* (9a) *modifizierten Voraussetzung des Satzes* 1 *gilt die Beziehung*

$$f^{(k)}(x) = o\left(\varphi(x)^{1-k/n} \psi(x)^{k/n}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Beweis. Wir legen bei $x \geqq d$ an den Punkt x nach rechts das Intervall der Länge $L = \left(\delta \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}$ an und wenden darauf die Ungleichung (1) an.

Es wird diesmal wegen (9a)

$$M_0 \leqq \delta\,\varphi(x), \qquad M_n \leqq B\,\psi(x),$$

so daß wir für $x > d = d(\delta)$ erhalten

$$|f^{(k)}(x)| \leqq M_k \leqq (2n)^{2n}\left(\delta\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{-k/n}\cdot\delta\,\varphi(x) + \left(\delta\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1-k/n}\cdot B\,\psi(x)$$

$$= \delta^{1-k/n}\cdot\left((2n)^{2n}+B\right)\cdot\varphi(x)^{1-k/n}\psi(x)^{k/n},$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist.

Satz 1b. *Unter der gemäß* (8b) *oder* (9b) *modifizierten Voraussetzung des Satzes* 1 *gilt die Beziehung*

$$f^{(k)}(x) = o\left(\varphi(x)^{1-k/n}\,\psi(x)^{k/n}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Beweis. Wir verwenden diesmal, ähnlich wie vorstehend, das Intervall der Länge $L = \left(\frac{1}{\delta}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1/n}$. Dann wird diesmal für $x > d = d(\delta)$

$$M_0 \leqq A\,\varphi(x), \qquad M_n \leqq \delta\,\psi(x),$$

und wir erhalten

$$|f^{(k)}(x)| \leqq M_k \leqq (2n)^{2n}\left(\frac{1}{\delta}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{-k/n}\cdot A\,\varphi(x) + \left(\frac{1}{\delta}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{1-k/n}\cdot\delta\,\psi(x)$$

$$= \delta^{k/n}\cdot\left((2n)^{2n}A+1\right)\cdot\varphi(x)^{1-k/n}\psi(x)^{k/n},$$

woraus wieder die Behauptung ersichtlich ist.

Münster (Westf.), den 20. Oktober 1929.

(Eingegangen am 26. Oktober 1929.)

Ein Satz über die Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten.

Von

Władysław Nikliborc in Lwów.

1. Es sei T irgendeine beschränkte Gleichgewichtsfigur einer rotierenden, homogenen Flüssigkeit, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Die Rotationsachse machen wir zur z-Achse, den Schwerpunkt von T zum Koordinatenursprung[1]). Dann ist nach einem Satze von Herrn Lichtenstein[2]) die Ebene $z = 0$ Symmetrieebene von T. Wir bezeichnen mit a die obere Schranke der Entfernungen der Punkte von T von der z-Achse[3]) und mit b die obere Schranke der Entfernungen der Punkte von T von der Ebene $z = 0$[4]). Die Größe $\frac{1}{\varepsilon}$, wo

$$\varepsilon = \frac{a}{b}$$

gesetzt wurde, nennen wir die *Abplattung* des Körpers T. Es sei noch mit ω die (konstante) Winkelgeschwindigkeit von T, mit f die (konstante) Dichte, mit $\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante bezeichnet. Es gilt dann

---

[1]) Der Schwerpunkt von T muß auf der Rotationsachse liegen. Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wiss. 1918, Erster Hlbbd. S. 1120–1135, insb. S. 1121.

[2]) Loc. cit. S. 1123.

[3]) Bezüglich der Abschätzung von a vgl. Lichtenstein, loc. cit.

[4]) Nach S. Mazurkiewicz ist entweder $b \leqq a$ oder aber $a < b \leqq e^{108050} \cdot v^{\frac{1}{3}}$, wobei v das Volumen von T bedeutet. Vgl. S. Mazurkiewicz, Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten. Math. Ztschr. **25** (1926), S. 749–753. Im Anschluß an diese Arbeit hat Herr E. Hölder gezeigt, daß entweder $b \leqq a$ oder $a < b < e^{9000} \cdot v^{\frac{1}{3}}$ gilt. E. Hölder, Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von Herrn Mazurkiewicz, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 754.

die Ungleichheit

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} < 1. \quad (1)$$ [5])

In dieser Schrift wird bewiesen, daß *ohne irgendwelche Einschränkung die Abschätzung*

$$\frac{\omega^2}{\pi f \varkappa} < \frac{4}{\pi} \int_{-1}^{+1} \operatorname{arc\,tg} \left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon^2(1+t)}} \right\} dt \quad (2)$$

gilt. Dies bedeutet eine Verbesserung der Ungleichheit (1), wenn ε *genügend groß*, d. h. *die Figur T stark abgeplattet ist.* Insbesondere folgt aus (2), daß ω *mit der Abplattung gegen Null* konvergiert. Mit anderen Worten:

[5]) Poincaré bewies zunächst, daß $\frac{\omega^2}{2\pi \varkappa f} \leqq 1$ ist. Vgl. Bulletin astronomique 1885, S. 118. S. auch Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris 1902, S. 11. Der Beweis stützt sich auf die Greensche Formel, was gewisse Annahmen über die Beschaffenheit des Körpers T bedingt. Dabei wird die Voraussetzung $\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$ gemacht, wo $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale und U das Gesamtpotential bedeutet. Einen ganz allgemeinen Beweis der Poincaréschen Abschätzung gab Herr Lichtenstein in der unter [1]) zitierten Abhandlung, wo der Satz in der schärferen Form $\frac{\omega^2}{2\pi \varkappa f} < 1$ bewiesen wird. Hierbei wird nicht einmal die Voraussetzung $\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$ gemacht.

Die Ungleichheit (1) bewies Herr Crudeli für konvexe Gleichgewichtsfiguren in der Abhandlung: Nuovo limite superiore della velocità angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformemente, limitati da figura di equilibrio, Atti dei Lincei **19** (1910), S. 666–668.

In der Abhandlung: Über die obere Schranke der Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 787–793, bewies ich die Ungleichheit (1) ganz allgemein, wobei nur gewisse Regularitätsannahmen über den Rand S von T gemacht wurden. A. a. O. findet man auch in der ersten Fußnote einen einfachen Beweis der früheren Poincaréschen Abschätzung.

Im Falle konvexer nichthomogener Flüssigkeiten bewies Herr Crudeli die Ungleichheit

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f_{\text{Max}}} \leqq 1,$$

wobei mit f_{Max} das Maximum der Dichte f bezeichnet ist. Dabei setzt man über f voraus, daß sie als Ortsfunktion in $T + S$ stetig und mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen ist. Vgl. U. Crudeli: Su la velocità angolari dei fluidi eterogenei rotanti, limitati di una figura di equilibrio, Atti della Acc. dei Lincei **19** (1910), 2, S. 41–43.

In der oben zitierten Note habe ich auch dieses Resultat auf den allgemeineren Fall übertragen.

„stark abgeplattete Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten können sich nur langsam drehen“ [6]).

Der Abschnitt 2 ist dem Beweise dieses Satzes gewidmet. In Abschnitt 3 wird das in der Ungleichheit (2) vorkommende Integral in eine unendliche Reihe entwickelt. Die weiteren Abschnitte enthalten verschiedene Bemerkungen und Zusätze.

2. Wir betrachten auf der Begrenzung S von T denjenigen Punkt P_0, dessen Abstand von der z-Achse möglichst groß (d.h. $= a$) ist. Der Punkt P_0 liegt in der Ebene $z = 0$ [7]). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß P_0 auf der negativen x-Achse liegt. Demnach besitzt P_0 die Koordinaten $(-a, 0, 0)$.

Bezeichnet man mit $V(x, y, z)$ das von T herrührende Newtonsche Gravitationspotential:

$$V(x, y, z) = \int_T \frac{d\tau}{r},$$

so sind die in den Richtungen der positiven Koordinatenachsen berechneten Komponenten der im Punkte (x, y, z) wirkenden Kräfte gleich

$$\varkappa f \frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x, \qquad \varkappa f \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y, \qquad \varkappa f \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Insbesondere bekommen wir im Punkte P_0 für diese Komponenten die Ausdrücke

$$\varkappa f \frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{P_0} - \omega^2 a, \qquad \varkappa f \frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{P_0}, \qquad 0.$$

Bemerkt man nun, daß T ganz in dem durch die Ungleichheit $x \geqq -a$ definierten Halbraume liegt, und wendet man jetzt den Lichtensteinschen Satz [8]) an, nach dem die resultierende Kraft in jedem Punkte von S entweder Null oder in das Innere von T gerichtet ist, so gelangt man zu der Ungleichheit

$$\varkappa f \frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{P_0} - \omega^2 a \geqq 0,$$

aus welcher die Abschätzung

$$\frac{\omega^2}{\pi f \varkappa} \leqq \frac{1}{a\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{P_0} \tag{3}$$

folgt.

[6]) Über den Inhalt dieser Note habe ich in einem Vortrage während des I. Kongresses der Mathematiker der slavischen Länder, Warszawa 1929 (23.–28. IX) referiert.

[7]) Dies folgt aus den unter [1]) zitierten Betrachtungen von Herrn Lichtenstein. Die Ebene $z = 0$ ist nämlich die Symmetrieebene von T; außerdem trifft jede zur z-Achse parallele Gerade den Rand S in höchstens zwei Punkten (S kann eine zur z-Achse parallele geradlinige Strecke nicht enthalten), woraus die Behauptung des Textes ohne weiteres folgt.

[8]) L. Lichtenstein, loc. cit. [1]) S. 1129.

Es sei jetzt Z der durch die Ungleichheiten

$$x^2 + y^2 \leqq a^2,$$
$$-b \leqq z \leqq b$$

erklärte Körper. Wir setzen

$$W(x, y, z) = \int_Z \frac{d\tau}{r}.$$

Es ist

$$\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{P_0} = \int_T \frac{a+x}{r^3}\, d\tau,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{P_0} = \int_Z \frac{a+x}{r^3}\, d\tau$$

mit $r^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2$.

Da die Gleichgewichtsfigur T ganz in Z enthalten ist und da in den beiden oben aufgeschriebenen Integralen die zu integrierende Funktion überall nichtnegativ ist, so folgt hieraus, daß

$$\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{P_0} < \frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{P_0} \tag{4}$$

gilt [9]).

Aus (3) und (4) ergibt sich sofort die für uns fundamentale Abschätzung

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} < \frac{1}{a\pi} \frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{P_0}. \tag{5}$$

Um jetzt den im ersten Abschnitte zitierten Satz zu beweisen, brauchen wir nur $\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{P_0}$ auszurechnen.

Es ist nun

$$\frac{\partial W}{\partial x}_{P_0} = 4 \int_{-a}^{+a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^b \frac{a+x}{r^3}\, dz.$$

Wie man leicht durch Differentiation nachprüft, ist

$$\int \frac{a+x}{r^3}\, dz = \frac{a+x}{(a+x)^2+y^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{(a+x)^2+y^2+z^2}},$$

woraus

$$\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{P_0} = 4b \int_{-a}^{+a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a+x}{(a+x)^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a+x)^2+y^2+b^2}}\, dy$$

folgt.

[9]) Das Gleichheitszeichen ist ausgeschlossen, weil bekanntlich Z keine Gleichgewichtsfigur ist, so daß der Inhalt von Z gewiß größer als der Inhalt von T ist.

Ebenfalls durch Differentiation überzeugt man sich leicht, daß

$$\int \frac{a+x}{(a+x)^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a+x)^2+y^2+b^2}}\, dy = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,tg}\left\{ \frac{b}{a+x} \cdot \frac{y}{\sqrt{(a+x)^2+y^2+b^2}} \right\}$$

gilt.

Es ist demnach

$$\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{P_0} = 4 \int_{-a}^{+a} \operatorname{arc\,tg}\left\{ \frac{b}{a+x} \cdot \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{2a^2+2ax+b^2}} \right\} dx .$$

Setzt man noch

$$x = a\,t$$

und

$$\varepsilon = \frac{a}{b} ,$$

so bekommt man

$$\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{P_0} = 4a \int_{-1}^{+1} \operatorname{arc\,tg}\left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon^2(1+t)}} \right\} dt ,$$

woraus in Verbindung mit (5) sofort die zu beweisende Ungleichheit (2) folgt.

Man kann nun leicht beweisen, daß ω gegen Null mit $\varepsilon \to \infty$ konvergiert. Denn es ist

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\delta} \operatorname{arc\,tg}\left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \right\} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{+1} \operatorname{arc\,tg}\left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon^2(1+t)}} \right\} dt .$$

Ist nun irgendeine positive Zahl η gegeben, so wähle man zunächst δ so, daß

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\delta} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt < \frac{\eta}{2}$$

ist, und bestimme dann die Zahl ε_0 so, daß für $\varepsilon > \varepsilon_0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{+1} \operatorname{arc\,tg}\left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon^2(1+t)}} \right\} dt < \frac{\eta}{2}$$

gilt.

Es ist also für $\varepsilon > \varepsilon_0$

$$\frac{\omega^2}{\pi f \varkappa} < \eta ,$$

wobei η beliebig ist, w. z. b. w.

3. Wir wollen jetzt das Integral

$$J = \int_{-1}^{+1} \operatorname{arc\,tg}\left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon^2(1+t)}} \right\} dt$$

berechnen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = z$$

und bekommen zunächst

$$J = 4\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\left\{z\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z^2+4\varepsilon^2}}\right\}\frac{z\,dz}{(1+z^2)^2}.$$

Wendet man jetzt die partielle Integration mit

$$u = \operatorname{arc\,tg}\left\{z\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z^2+4\varepsilon^2}}\right\}, \qquad dv = \frac{z\,dz}{1+z^2}$$

an, so bekommt man

$$J = 2\int_0^\infty \frac{(1+z^2+4\varepsilon^2)(1+z^2)+4\varepsilon^2 z^2}{(1+z^2)^2+4\varepsilon^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{1+z^2+4\varepsilon^2}\cdot\sqrt{1+z^2}^3}.$$

Wir setzen jetzt

$$z = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{4\varepsilon^2}{1+4\varepsilon^2} = \lambda^2 \tag{7}$$

und erhalten nach leichter Umformung

$$J = \frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\lambda^2\sin^4\varphi}{1-\lambda^2\sin^2\varphi\cdot(2-\sin^2\varphi)}\cdot\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}$$

oder

$$J = \frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\lambda^2\sin^4\varphi}{1-\frac{\lambda^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}\cdot\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}^3}. \tag{8}$$

Wegen (7) ist aber

$$\lambda < 1 \tag{9}$$

und daher

$$0 < \frac{\lambda^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{1-\lambda^2\sin^2\varphi} < 1,$$

so daß wir den Ausdruck

$$1-\frac{1}{\frac{\lambda^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{1-\lambda^2\sin^2\varphi}}$$

in eine konvergente geometrische Reihe entwickeln können. Auf diese Weise ergibt sich aus (8) die Formel

$$J = \frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\lambda^2 \sin^4\varphi) \left\{ \frac{\lambda^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{1-\lambda^2 \sin^2\varphi} \right\}^{\nu} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2\varphi}^3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda^{2\nu} \sin^{2\nu}\varphi \cos^{2\nu+2}\varphi \frac{d\varphi}{(1-\lambda^2 \sin^2\varphi)^{3/2+\nu}}$$

$$- \frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda^{2\nu+2} \sin^{2\nu+4}\varphi \cos^{2\nu+2}\varphi \frac{d\varphi}{(1-\lambda^2 \sin^2\varphi)^{3/2+\nu}}.$$

Es ist aber wegen (9)

$$\frac{1}{(1-\lambda^2 \sin^2\varphi)^{3/2+\nu}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{-\nu-\frac{3}{2}}{\mu} \lambda^{2\mu} \sin^{2\mu}\varphi,$$

woraus schließlich

$$(10) \quad \begin{aligned} J = {} & \frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{-\nu-\frac{3}{2}}{\mu} \lambda^{2\mu+2\nu} J_{2\mu+2\nu,\,2\nu+2} \\ & - \frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{-\nu-\frac{3}{2}}{\mu} \lambda^{2\mu+2\nu+2} J_{2\mu+2\nu+4,\,2\nu+2} \end{aligned}$$

mit

$$J_{\alpha,\beta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha}\varphi \cos^{\beta}\varphi \, d\varphi$$

folgt.

Betrachtet man zunächst diejenigen Glieder, die $\mu = 0$ entsprechen, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{2\nu} J_{2\nu,\,2\nu+2} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{2\nu+2} J_{2\nu+4,\,2\nu+2}$$

$$= J_{0,2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{2\nu} J_{2\nu,\,2\nu+2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{2\nu} J_{2\nu+2,\,2\nu} = J_{0,2} = \frac{\pi}{4}.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} J = \frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}} \Bigg\{ & \frac{\pi}{4} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{-\nu-\frac{3}{2}}{\mu} \lambda^{2\mu+2\nu} J_{2\mu+2\nu,\,2\nu+2} \\ & - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \binom{-\nu-\frac{3}{2}}{\mu} \lambda^{2\mu+2\nu+2} J_{2\mu+2\nu+4,\,2\nu+2} \Bigg\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber für ganze und nicht gleichzeitig verschwindende m und n

$$J_{2m,2n} = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3\cdot 1\cdot(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1}{(2m+2n)(2m+2n-2)\dots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt nach leichter Rechnung

$$(-1)^{\mu}\binom{-\nu-\frac{3}{2}}{\mu}J_{2\mu+2\nu,2\nu+2} = \frac{1}{2^{4\mu+4\nu}}\binom{2\mu+2\nu+1}{\mu}\binom{2\mu+2\nu-1}{\mu+\nu}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$(-1)^{\mu}\binom{-\nu-\frac{3}{2}}{\mu}J_{2\mu+2\nu+4,2\nu+2} = \frac{1}{2^{4\mu+4\nu+4}}\binom{2\mu+2\nu+3}{\mu}\binom{2\mu+2\nu+1}{\mu+\nu}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Es ist also

$$J = \frac{\pi}{2\sqrt{1+4\varepsilon^2}}\left\{1+2\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2\mu+2\nu}}{2^{4\mu+4\nu}}\binom{2\mu+2\nu+1}{\mu}\binom{2\mu+2\nu-1}{\mu+\nu}\right.$$
$$\left.-2\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2\mu+2\nu+2}}{2^{4\mu+4\nu+4}}\binom{2\mu+2\nu+3}{\mu}\binom{2\mu+2\nu+1}{\mu+\nu}\right\}.$$

Wir betrachten jetzt in der ersten Doppelsumme diejenigen Glieder, für welche $\mu+\nu=s$ ist. Ihr gesamter Wert ist gleich

$$\frac{2}{2^{4s}}\binom{2s-1}{s}\left\{\binom{2s+1}{1}+\binom{2s+1}{2}+\dots+\binom{2s+1}{s}\right\}$$
$$=\frac{1}{2^{4s}}\binom{2s-1}{s}\left[\frac{2^{2s+1}}{2}-1\right]=\frac{1}{2^{4s}}\binom{2s-1}{s}(2^{2s}-1).$$

Desgleichen bekommt man in der zweiten Doppelsumme für diese Glieder $\frac{1}{2^{4s+4}}\binom{2s+1}{s}\left[2^{2s+2}-1-\binom{2s+3}{s+1}\right]$.

Es ist also

$$J = \frac{\pi}{2\sqrt{1+4\varepsilon^2}}\left\{1+2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2s}}{2^{4s}}\binom{2s-1}{s}(2^{2s}-1)\right.$$
$$\left.-2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^{2s+2}}{2^{4s+4}}\binom{2s+1}{s}\left[2^{2s+2}-1-\binom{2s+3}{s+1}\right]\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+4\varepsilon^2}}\left[1+\frac{3}{8}\lambda^2+2\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\lambda^{2s}}{2^{4s}}\binom{2s-1}{s-1}\binom{2s+1}{s}\right]$$

und daraus endgültig

$$J = \frac{\pi}{2\sqrt{1+4\varepsilon^2}}\left[1+4\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2s+1}{s+1}\binom{2s-1}{s}^2\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{2s}\right].$$

Es ist also

$$\frac{\omega^2}{\pi f\varkappa} \leqq \frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon^2}}\left[1+4\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2s+1}{s+1}\binom{2s-1}{s}^2\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{2s}\right]. \tag{11}$$

4. Im Falle $\varepsilon = 0$ kann man natürlich das Integral J

$$J = \int_{-1}^{+1} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$$

durch partielle Integration mit $u = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$, $dv = dt$ sofort berechnen und bekommt

$$J = \frac{\pi}{2},$$

so daß in diesem Falle

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa} \leqq 1 \tag{12}$$

gilt.

Dem Fall $\varepsilon = 0$ entspricht, unter anderen, der unendlich lange elliptische Zylinder (a endlich, b unendlich), so daß (12) auch für elliptische unendlich lange Zylinder gilt.

Nun gibt aber Tisserand in dem zweiten Bande seines großen Werkes „Traité de mécanique céleste“ [10]) an, daß in diesem Falle

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa} \leqq \frac{1}{2}$$

gilt.

Entweder also ist für $\varepsilon = 0$ unsere Abschätzung zu roh, oder aber die Tisserandsche Schranke ist nicht richtig. Man überzeugt sich nun leicht, daß die Tisserandsche Abschätzung dann und nur dann richtig ist, wenn man es mit einem elliptischen Zylinder, der aber kein Kreiszylinder ist, zu tun hat. A. a. O. beweist nämlich Tisserand, daß

$$\left(\omega^2 - 4\pi f \varkappa \frac{b}{a+b}\right) x\, dx + \left(\omega^2 - 4\pi f \varkappa \frac{a}{a+b}\right) y\, dy = 0 \tag{13}$$

und

$$\frac{x\, dx}{a^2} + \frac{y\, dy}{b^2} = 0 \tag{14}$$

auf der Oberfläche des Zylinders gilt. Hierbei bedeuten a und b die Halbachsen der Ellipse. (Wir haben hier die Tisserandschen Formeln unseren Bezeichnungen angepaßt.) Daraus schließt Tisserand, daß

$$a^2 \left(\omega^2 - 4\pi f \varkappa \frac{b}{a+b}\right) = b^2 \left(\omega^2 - 4\pi f \varkappa \frac{a}{a+b}\right)$$

---

[10]) Paris 1891. T. II, S. 108, Nr. 60. Erster Satz: „Avec un cylindre elliptique indéfini, l'équilibre n'est possible, que si la quantité $\frac{\omega^2}{2\pi f \varrho}$ est inférieure à $\frac{1}{2}$.“ (ϱ Dichte, f Gravitationskonstante.)

ist, woraus schon

$$\frac{a}{a+b} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\pi f \varkappa}}$$

folgt.

Man sieht hier, daß im Falle $a \quad b$ die Tisserandsche Schlußweise unrichtig ist, da die Gleichungen (13) und (14) sich nur um den konstanten Faktor $\omega^2 - 2\pi f \varkappa$ unterscheiden.

In dem besonderen Falle $a = b$ reichen die Gleichungen nicht aus, was ja auch von selbst ganz klar ist. Denn im Falle des Kreiszylinders muß das Newtonsche Gravitationspotential von der Gestalt $\varphi(x^2 + y^2)$ sein, so daß die Gleichung

$$U = \varkappa f V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{konst.}$$

für beliebige Werte der Konstanten f und ω gilt. Trotzdem ist hier die Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$$

keine Folgerung der Gleichung $U = C$, wenn

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa} > 1$$

ist, wohl aber im Falle

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa} \leqq 1.$$

Im Falle des unendlich langen Kreiszylinders muß man eben noch die Forderung $\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$ hinzufügen, damit man die Abschätzung für $\frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa}$ bekommt. Die Forderung $\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$ entspricht aber der physikalischen Tatsache, daß die resultierende Kraft entweder in das Innere des Körpers gerichtet sein muß oder daß sie Null ist. Wie wir schon früher gesagt haben[11]), bewies Herr Lichtenstein, daß im Falle beschränkter Gleichgewichtsfiguren aus $U = C$ die Ungleichheit $\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$ folgt. Es ist interessant, daß *dieser Lichtensteinsche Satz* für unbeschränkte Figuren *nicht gilt.*

5. Für $\varepsilon = 1$ gibt (2) nichts Neues, da aus dieser Formel nur $\frac{\omega^2}{\pi f \varkappa} < 0{,}74$[12]) folgt. Man wird also in diesem Falle die von Herrn Crudeli und mir abgeleitete Abschätzung (1) vorziehen. Für genügend große ε ist aber die Abschätzung (2) besser als (1), da wir bewiesen haben, daß $\omega \to 0$ mit $\varepsilon \to \infty$ konvergiert.

---

[11]) Vgl. Fußnote [8]).

[12]) Für $\varepsilon < 1$ noch schlimmer!

Wir wollen hier noch eine Bemerkung hinzufügen: Setzen wir voraus, daß die Z-Achse die Oberfläche S von T nicht trifft, so kann man die Ungleichheit (2) wie folgt verschärfen:

Es sei

$$a_1 = \operatorname{Min}(x^2 + y^2), \qquad a_2 = \operatorname{Max}(x^2 + y^2)$$

auf S. Setzt man noch

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{b_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

(man kann ε_1 und ε_2 naturgemäß als „innere" und „äußere" Abplattung von T bezeichnen), so geht aus dem Beweise der Formel (2) unmittelbar hervor, daß

$$\frac{\omega^2}{\pi f \varkappa} \leqq \int_{-1}^{+1} \left[\operatorname{arc\,tg} \left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_2^2(1+t)}} \right\} - \operatorname{arc\,tg} \left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_1^2(1+t)}} \right\} \right] dt$$

gilt

Man bekommt also bessere Resultate als im Falle $\varepsilon_1 = 0$.

6. In noch einer Richtung können unsere Ergebnisse verschärft werden, und zwar unter der Voraussetzung, daß die durch den Punkt P_0 (d. h. durch den am weitesten von der Rotationsachse entfernten Punkt der Gleichgewichtsfigur T) und die Rotationsachse bestimmte Ebene zugleich eine Symmetrieebene von T ist.

Es sei in diesem Falle

$$g = \operatorname{Min} \frac{\partial U(M)}{\partial n},$$

unter M einen beliebigen Punkt auf S, unter $\frac{\partial}{\partial n}$ die nach dem Innern von T gerichtete Normalableitung verstanden. In diesem Falle ist $\frac{\partial U(P_0)}{\partial y} = \frac{\partial U(P_0)}{\partial z} = 0$, so daß

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial n} = \frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = \varkappa f \frac{\partial V(P_0)}{\partial x} - \omega^2 a$$

ist. Der Bestimmung der Zahl g zufolge ist

$$\varkappa f \frac{\partial V}{\partial x}(P_0) - \omega^2 a \geqq g,$$

und die Überlegungen des zweiten Abschnittes zeigen uns unmittelbar, daß für ω^2 die Abschätzung

$$\frac{\omega^2}{\pi \varkappa f} \leqq \frac{4}{\pi} \int_{-1}^{+1} \operatorname{arc\,tg} \left\{ \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon^2(1+t)}} \right\} dt - \frac{g}{\pi \varkappa f a} \tag{15}$$

gilt.

Bezüglich der Zahl g muß hier folgendes bemerkt werden: Besitzt S eine stetige tangentiale Ebene, so ist $\frac{\partial U}{\partial n}$ auf S stetig, so daß die Zahl g gewiß existiert. Werden über S keine Voraussetzungen gemacht, so ist unter g die größte obere Grenze der Zahlen $\frac{\partial U}{\partial n}$ zu verstehen.

Es ist natürlich stets $g \geqq 0$. Im Falle $g = 0$ gibt die Abschätzung (15) dasselbe Resultat wie (2). Im Falle $g > 0$ ist die Abschätzung (15) natürlich genauer als (2). Insbesondere ist nach einem Satze des Herrn Lichtenstein $g > 0$ gewiß dann, wenn S stetige Normale besitzt[13]).

Die Ausführungen dieses Abschnittes sind insbesondere stets dann gültig, wenn T eine Rotationsfigur ist.

Schlußbemerkung. Ist die Flüssigkeit nicht homogen, so bleiben sämtliche Ausführungen dieser Arbeit gültig, wenn man unter f das Maximum (obere Grenze) der, als beschränkt und integrabel vorausgesetzten, Dichte versteht.

[13]) Lichtenstein, loc. cit. S. 1130.

(Eingegangen am 5. Oktober 1929.)

Die Funktionalgleichung der Zetafunktion und der Dirichletschen Reihen mit periodischen Koeffizienten.

Von

Walter Schnee in Leipzig.

Das schönste Resultat über die Zetafunktion, das schon Riemann beweisen konnte, ist die nach ihm benannte Funktionalgleichung. Aber die beiden Beweise, die Herr Landau[1]) in seinem „Handbuch" darstellt, sind immer noch sehr lang und kompliziert, weil sie beide auf Kunstgriffen beruhen, deren Zweck sich erst nach langen Untersuchungen durch den Erfolg aufklärt. Der in dem neuen dreibändigen Lehrbuch von Herrn Landau[2]) enthaltene Beweis ist sachlich von dem ersten dieser Beweise nicht verschieden. Nun hat im vorigen Jahr Herr Mordell[3]) einen neuen Beweis veröffentlicht, der aber schließlich sogar noch in der Umgestaltung von Herrn Rademacher[4]) trotz knapper Darstellung reichlich kompliziert ist. Diese beiden Arbeiten veranlassen mich aber, einen Beweis der Funktionalgleichung mitzuteilen, den ich mir schon vor Jahren für Vorlesungszwecke zurechtgelegt habe und der auch die Grundlage der Leipziger Dissertation von Herrn Willi Langer[5]) bildete. Dieser Beweis scheint mir zugleich durchsichtig und völlig elementar zu sein, und ich stelle ihn daher absichtlich in derjenigen Breite dar, in der er für einen Leser, der nur die Grundlagen der Analysis und nichts aus der Theorie der Zetafunktion kennt, am leichtesten verständlich ist. Im Anschluß daran beweise ich u. a. eine Funktionalgleichung, der jede Dirichletsche Reihe mit periodischen Koeffizienten

[1]) „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen", Teubner 1909, **1**, S. 270—299.

[2]) „Vorlesungen über Zahlentheorie", Hirzel 1927, **2**, S. 63—69.

[3]) Cambridge Phil. Soc. Proc. **24** (1928), Part 4, S. 585—596.

[4]) Math. Zeitschrift **31** (1929), S. 39—44.

[5]) „Einige Anwendungen der Eulerschen Summenformel", Jahrbuch der Phil. Fak. Leipzig 1921, **2**, S. 165—170 (Auszug).

genügt; diese ist ganz überraschend einfach und scheint mir, wenn man sie auf die in der Zahlentheorie eine so große Rolle spielenden Charakterreihen (L-Reihen) anwendet, die Quelle zu sein, von der aus ihre Funktionalgleichungen erst recht verständlich werden.

§ 1.

Ich gebrauche aus den allgemein bekannten Grundlagen der Analysis die Funktionalgleichung der Gammafunktion

$$\Gamma(s) = (s-1)\,\Gamma(s-1) \tag{1}$$

und die beiden Integraldarstellungen

$$\frac{\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}}{a^s} = \int_0^\infty x^{s-1}\cos a x\,dx, \qquad \frac{\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}}{a^s} = \int_0^\infty x^{s-1}\sin a x\,dx, \tag{2}$$

die bei positivem a beide in dem Streifen $0 < \sigma < 1$ konvergieren, wo wie üblich $s = \sigma + ti$ gesetzt ist; daß die zweite Gleichung sogar im Streifen $-1 < \sigma < 1$ konvergiert, wird im folgenden nicht benutzt. Ferner gebrauche ich die folgende wohl bekannte Gleichung aus der Theorie der Fourierschen Reihen

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right), \tag{3}$$

die für $-\pi < x < \pi$ gilt und wo die Reihe rechts bei beliebig kleinem positiven ε im Intervall $-\pi + \varepsilon \leqq x \leqq \pi - \varepsilon$ sogar gleichmäßig konvergiert. Durch die Substitution $x = 2\pi(\vartheta - \frac{1}{2})$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{1}{2} - \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n\vartheta}{\pi n}$$

für $0 < \vartheta < 1$, und es ist daher, wenn bei reellem x der Ausdruck $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ bedeutet und $\vartheta = x - [x]$ gesetzt wird, für jedes nicht ganzzahlige x

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}; \tag{4}$$

diese Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem Intervall $m + \varepsilon \leqq x \leqq m + 1 - \varepsilon$, wo m eine beliebige ganze Zahl und ε eine beliebig kleine positive Zahl ist.

Für die Zetafunktion, die in der Halbebene $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert ist, gebrauchen wir nur die wohl bekannte Umformung

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{\vartheta\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}},$$

die sich ergibt, wenn man das ϑ-Integral durch partielle Integration ausrechnet; die Reihe rechts aber konvergiert sogar in der Halbebene $\sigma > 0$, wie man sofort aus der Abschätzung

$$\left|\int_0^1 \frac{\vartheta\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}}\right| \leqq \frac{1}{n^{\sigma+1}}\int_0^1 \vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\sigma+1}}$$

erkennt. Hieraus ergibt sich weiter für die Halbebene $\sigma > 0$

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}}; \tag{5}$$

da aber die partielle Integration die Formel

$$\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}} = \frac{s+1}{2}\int_0^1 \frac{(\vartheta-\vartheta^2)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}} \tag{6}$$

und damit die Abschätzung

$$\left|\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}}\right| \leqq \frac{|s+1|}{2}\cdot\frac{1}{n^{\sigma+2}}\int_0^1 (\vartheta-\vartheta^2)\, d\vartheta = \frac{|s+1|}{12}\cdot\frac{1}{n^{\sigma+2}}$$

liefert, so konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von (5) sogar in der Halbebene $\sigma > -1$. Da weiter in der Halbebene $\sigma < 0$ die Formel

$$s\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{\vartheta^{s+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1}$$

gilt, so erhält man aus (5) für den Streifen $-1 < \sigma < 0$ die Darstellung

$$\zeta(s) = s\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+1}} = s\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\, dx, \tag{7}$$

wo $\varphi(x)$ die in der Gleichung (4) auftretende Funktion von x ist, die an den ganzzahligen Werten von x Sprungstellen besitzt.

Ersetzt man s durch $1-s$, so erhält man für den Streifen $1 < \sigma < 2$ die Darstellung

$$\zeta(1-s) = (1-s)\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^{2-s}}\, dx,$$

also unter Benutzung von (4)

$$\zeta(1-s) = (1-s)\int_0^\infty \frac{dx}{x^{2-s}} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}. \tag{8}$$

Wenn es nun gestattet ist, in dieser Formel für $1 < \sigma < 2$ die Reihenfolge der unendlichen Summation und der unendlichen Integration zu vertauschen, so ergibt sich hieraus unter Benutzung der zweiten Formel (2), in der nur s durch $s-1$ zu ersetzen ist und schließlich unter Benutzung der Funktionalgleichung (1) der Gammafunktion:

$$\begin{aligned}\zeta(1-s) &= (1-s)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n}\int_0^\infty x^{s-2}\sin 2\pi n x\, dx \\ &= (1-s)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{\Gamma(s-1)\sin(s-1)\frac{\pi}{2}}{(2\pi n)^{s-1}} \\ &= \frac{\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}}{\pi\cdot(2\pi)^{s-1}}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\,\zeta(s).\end{aligned} \tag{9}$$

Damit ist die Riemannsche Funktionalgleichung zunächst im Streifen $1 < \sigma < 2$ bewiesen; berücksichtigt man aber, daß wir die Zetafunktion bereits sukzessive aus der Halbebene $\sigma > 1$ in $\sigma > 0$ und schließlich $\sigma > -1$ fortgesetzt haben, so liefert die Funktionalgleichung infolge des Prinzips der Permanenz der analytischen Beziehungen, auf dem ja die analytische Fortsetzung überhaupt beruht, die Fortsetzung der Zetafunktion über die ganze s-Ebene hin, und die Funktionalgleichung gilt also für jeden Wert von s.

Es bleibt also nur übrig, nachzuweisen, daß die Vertauschung der beiden unendlichen Prozesse gerechtfertigt ist. Dazu gehen wir aus von der Gleichung

$$\int_{m+\frac{1}{N}}^{m+1-\frac{1}{N}} \frac{dx}{x^{2-s}} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n}\int_{m+\frac{1}{N}}^{m+1-\frac{1}{N}} x^{s-2}\sin 2\pi n x\, dx, \tag{10}$$

in der m eine ganze Zahl $\geqq 0$ und N eine ganze Zahl $\geqq 2$ bedeutet, während s bei den folgenden Betrachtungen immer einen festen Punkt im Streifen $1 < \sigma < 2$ darstellt. Diese Gleichung ist gerechtfertigt, da ja die unendliche Reihe in dem endlichen Integrationsintervall gleichmäßig konvergiert. Es ist also nur nachzuweisen, daß bei festem ganzzahligen $m \geqq 0$ die Beziehungen

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\lim_{N=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \int_{m}^{m+\frac{1}{N}} x^{s-2} \sin 2\pi n x \, dx = 0, \\ &\lim_{N=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \int_{m+1-\frac{1}{N}}^{m+1} x^{s-2} \sin 2\pi n x \, dx = 0 \end{aligned}$$

gelten. Dann folgt aus (10) durch den Grenzübergang $N = \infty$

$$\int_{m}^{m+1} \frac{dx}{x^{2-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \cdot \int_{m}^{m+1} x^{s-2} \sin 2\pi n x \, dx.$$

Es ist daher für jede positive ganze Zahl X, wie man durch Addition dieser Gleichungen für $m = 0, 1, \ldots, X-1$ erkennt:

$$(12)\qquad \int_{0}^{X} \frac{dx}{x^{2-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \cdot \int_{0}^{X} x^{s-2} \sin 2\pi n x \, dx,$$

und es ist jetzt nur noch nachzuweisen, daß

$$(13)\qquad \lim_{X=\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \int_{X}^{\infty} x^{s-2} \sin 2\pi n x \, dx = 0$$

ist. Dann folgt aus (12) durch den Grenzübergang $X = \infty$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \cdot \int_{0}^{\infty} x^{s-2} \sin 2\pi n x \, dx,$$

was zu beweisen war. Es fehlt also nur der Nachweis von (11) und (13) für $1 < \sigma < 2$.

Es sei $Y \geqq 1$ und N die kleinste ganze Zahl $\geqq Y$. Dann erhält man:

$$\int_{N}^{\infty} \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}} dy = \sum_{n=N}^{\infty} \int_{0}^{1} \frac{\sin 2\pi \vartheta \, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{2-s}} = \sum_{n=N}^{\infty} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi \vartheta \, d\vartheta \left(\frac{1}{(n+\vartheta)^{2-s}} - \frac{1}{(n+\frac{1}{2}+\vartheta)^{2-s}} \right)$$

$$= (2-s) \sum_{n=N}^{\infty} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi \vartheta \, d\vartheta \int_{n+\vartheta}^{n+\frac{1}{2}+\vartheta} \frac{dy}{y^{3-s}},$$

$$\left| \int_{N}^{\infty} \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}} dy \right| < \frac{|2-s|}{2} \sum_{n=N}^{\infty} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{d\vartheta}{(n+\vartheta)^{3-\sigma}} < \frac{|2-s|}{2} \int_{N}^{\infty} \frac{dy}{y^{3-\sigma}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2-s}{2-\sigma} \cdot \frac{1}{N^{2-\sigma}} \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{|2-s|}{2-\sigma} \cdot \frac{1}{Y^{2-\sigma}},$$

und außerdem

$$\left| \int_Y^N \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\, dy \right| < \frac{1}{Y^{2-\sigma}}.$$

Folglich ist für jedes $Y \geqq 1$

$$\left| \int_Y^\infty \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\, dy \right| < \frac{3}{2} \cdot \frac{|2-s|}{2-\sigma} \cdot \frac{1}{Y^{2-\sigma}} \leqq \frac{3}{2} \cdot \frac{|2-s|}{2-\sigma}. \tag{14}$$

Hieraus folgt für jedes $n \geqq 1$ und $X \geqq 1$

$$\left| \int_X^\infty \frac{\sin 2\pi nx}{x^{2-s}}\, dx \right| = \frac{1}{n^{s-1}} \left| \int_{nX}^\infty \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\, dy \right| < \frac{1}{n^{\sigma-1}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{|2-s|}{2-\sigma} \cdot \frac{1}{(nX)^{2-\sigma}}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{|2-s|}{2-\sigma} \cdot \frac{1}{n \cdot X^{2-\sigma}};$$

also ist für $X \geqq 1$

$$\left| \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n} \int_X^\infty \frac{\sin 2\pi nx}{x^{2-s}}\, dx \right| < \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{|2-s|}{2-\sigma} \cdot \frac{1}{X^{2-\sigma}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{|2-s|}{2-\sigma} \cdot \frac{1}{X^{2-\sigma}},$$

und hieraus folgt (13) für $\sigma < 2$.

Ferner ist für $0 \leqq y_0 < y_1 \leqq 1$ wegen $\sigma > 1$

$$\left| \int_{y_0}^{y_1} \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\, dy \right| \leqq 2\pi \cdot \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y^{1-\sigma}} \leqq 2\pi \int_0^1 \frac{dy}{y^{1-\sigma}} = \frac{2\pi}{\sigma} < 2\pi;$$

kombiniert man dieses Resultat mit (14), so erhält man für $0 \leqq y_0 < y_1$ bei beliebigem y_0 und y_1

$$\left| \int_{y_0}^{y_1} \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\, dy \right| < (2\pi + 3) \frac{|2-s|}{2-\sigma},$$

und daher für $n \geqq 1$, $0 \leqq x_0 < x_1$

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin 2\pi nx}{x^{2-s}}\, dx \right| = \left| \frac{1}{n^{s-1}} \int_{nx_0}^{nx_1} \frac{\sin 2\pi y}{y^{2-s}}\, dy \right| < \frac{2\pi + 3}{n^{\sigma-1}} \cdot \frac{|2-s|}{2-\sigma}. \tag{15}$$

Ferner ist für ganzzahlige Werte von $m \geqq 0$, $n \geqq 1$ sowie für $N \geqq 2$

$$\left| \int_m^{m+\frac{1}{N}} \frac{\sin 2\pi nx}{x^{2-s}}\, dx \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{N}} \frac{\sin 2\pi n\vartheta\, d\vartheta}{(m+\vartheta)^{2-s}} \right| < \int_0^{\frac{1}{N}} \frac{d\vartheta}{\vartheta^{2-\sigma}} = \frac{1}{\sigma - 1} \cdot \frac{1}{N^{\sigma-1}}. \tag{16}$$

Also ergibt sich bei ganzzahligem $N \geqq 2$ und ganzzahligem $m \geqq 0$ aus (16) und (15)

$$(17)\quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \int_{m}^{m+\frac{1}{N}} \frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\, dx \right| < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{1}{\sigma - 1} \cdot \frac{1}{N^{\sigma-1}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{2\pi+3}{n^{\sigma-1}} \cdot \frac{|2-s|}{2-\sigma}$$

$$< \frac{\log N + 1 + (2\pi+3)\frac{|2-s|}{2-\sigma}}{\pi(\sigma-1)N^{\sigma-1}},$$

woraus die erste der beiden Formeln (11) für $1 < \sigma < 2$ folgt und sogar gleichmäßig für die ganzen Zahlen $m \geqq 0$. Ebenso erhält man analog zu (16)

$$\left| \int_{m+1-\frac{1}{N}}^{m+1} \frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\, dx \right| = \left| -\int_{0}^{\frac{1}{N}} \frac{\sin 2\pi n \vartheta}{(m+1-\vartheta)^{2-s}}\, d\vartheta \right| < \frac{1}{\sigma-1} \cdot \frac{1}{N^{\sigma-1}},$$

und daher analog zu (17)

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \int_{m+1-\frac{1}{N}}^{m+1} \frac{\sin 2\pi n x}{x^{2-s}}\, dx \right| < \frac{\log N + 1 + (2\pi+3)\frac{|2-s|}{2-\sigma}}{\pi(\sigma-1)N^{\sigma-1}},$$

so daß auch die zweite der Formeln (11) gleichmäßig für die ganzen Zahlen $m \geqq 0$ gilt.

§ 2.

Der Grundgedanke dieses Beweises der Riemannschen Funktionalgleichung ist sehr durchsichtig, weil er ja nur in dem formalen Übergang von (8) zu (9) besteht. Aber es ist mühsam, die Vertauschbarkeit der beiden unendlichen Prozesse nachzuweisen. Deshalb möchte ich noch die folgende Beweisanordnung auseinandersetzen, welche diese Schwierigkeit fast ganz umgeht und zugleich neue Einblicke über die sukzessive Fortsetzung der Zetafunktion in die Halbebenen $\sigma > 0$, $\sigma > -1$, $\sigma > -2$ usw. gewährt, die so auf der Hand liegen, daß ich sie unter Beschränkung auf das Ziel der Untersuchung nicht näher auszuführen brauche. Aus (5) und (6) ergibt sich die Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{s(s+1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \frac{(\vartheta - \vartheta^2)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}},$$

die in der Halbebene $\sigma > -1$ konvergiert. Hieraus folgt, zunächst wieder für $\sigma > -1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{s}{12} - \frac{s(s+1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{(\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6})\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}}. \tag{18}$$

Nun aber liefert die partielle Integration

$$\int_0^1 \frac{(\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6})\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}} = \frac{s+2}{6} \int_0^1 \frac{(2\vartheta^3 - 3\vartheta^2 + \vartheta)\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+3}},$$

so daß die Darstellung (18) sogar in der Halbebene $\sigma > -2$ konvergiert. Ferner ist für $\sigma < -1$

$$-\frac{s(s+1)}{2} \int_0^1 \frac{(\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6})\, d\vartheta}{\vartheta^{s+2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + \frac{s}{12},$$

so daß man aus (18) im Streifen $-2 < \sigma < -1$ die Darstellung

$$\zeta(s) = -\frac{s(s+1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6})\, d\vartheta}{(n+\vartheta)^{s+2}} \tag{19}$$

erhält.

An Stelle der Reihenentwicklung (3) müssen wir jetzt die Gleichung

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right)$$

heranziehen, die im Intervall $-\pi \leqq x \leqq \pi$ bei absoluter und gleichmäßiger Konvergenz gilt. Durch die Substitution $x = 2\pi(\vartheta - \frac{1}{2})$ ergibt sich für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$

$$\vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n\vartheta}{(\pi n)^2},$$

und hieraus für jeden reellen Wert von x

$$\psi(x) = \vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(\pi n)^2}, \tag{20}$$

wo wieder $\vartheta = x - [x]$ ist und die Reihe rechts absolut und gleichmäßig für alle x konvergiert. Also ergibt sich aus (19) die im Streifen $-2 < \sigma < -1$ geltende Darstellung

$$\zeta(s) = -\frac{s(s+1)}{2} \int_0^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+2}}\, dx.$$

Man erhält daher für $2 < \sigma < 3$:

$$\zeta(1-s) = -\frac{(1-s)(2-s)}{2}\int_0^\infty \psi(x)\, x^{s-3}\, dx$$

$$= -\frac{(s-1)(s-2)}{2}\int_0^\infty x^{s-3}\, dx \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2\pi n x}{(\pi n)^2}.$$

Die Vertauschung der beiden unendlichen Prozesse ergibt also wieder wegen der ersten Formel (2) und wegen (1) für $2 < \sigma < 3$:

$$\zeta(1-s) = -\frac{(s-1)(s-2)}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\pi n)^2}\int_0^\infty x^{s-3}\cos 2\pi n x\, dx$$

$$= -\frac{(s-1)(s-2)}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\pi n)^2}\cdot\frac{\Gamma(s-2)\cos\frac{(s-2)\pi}{2}}{(2\pi n)^{s-2}}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\zeta(s).$$

Die Vertauschbarkeit ist aber jetzt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (20) für alle x viel leichter zu beweisen, da die zu (12) analoge Gleichung jetzt trivial ist und nur noch die zu (13) analoge Gleichung ganz ebenso wie im vorigen Paragraphen zu beweisen ist.

§ 3.

Wir wollen jetzt die Untersuchungen von § 1 auf die für $\sigma > 1$ konvergente Reihe

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+w)^s}$$

übertragen. Dabei setzen wir w als reell voraus und nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $0 < w \leqq 1$ an, so daß

$$\zeta(s, 1) = \zeta(s)$$

ist. Wir erhalten für $\sigma > 0$ die bekannte Entwicklung

$$\zeta(s, w) = \frac{1}{w^s} + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{w^{s-1}} - s\sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{\vartheta\, d\vartheta}{(n+w+\vartheta)^{s+1}},$$

woraus sich analog zu (5) die für $\sigma > -1$ geltende Entwicklung

$$\zeta(s, w) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{w^s} + \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{w^{s-1}} + s\sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}-\vartheta)\, d\vartheta}{(n+w+\vartheta)^{s+1}} \tag{21}$$

ergibt. Hieraus aber folgt im Streifen $-1 < \sigma < 0$ wegen $0 < w \leqq 1$:

$$\zeta(s, w) = \frac{1}{w^s} + s\int_{-w}^{0} \frac{(\frac{1}{2} - \vartheta)\,d\vartheta}{(w+\vartheta)^{s+1}} + s\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1} \frac{(\frac{1}{2} - \vartheta)\,d\vartheta}{(n+w+\vartheta)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{w^s} + s\int_{0}^{w} \frac{\frac{1}{2} + w - x}{x^{s+1}}\,dx + s\int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{(x+w)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{w^s} + s\int_{0}^{w} \frac{\varphi(x-w)+1}{x^{s+1}}\,dx + s\int_{w}^{\infty} \frac{\varphi(x-w)\,dx}{x^{s+1}}$$

$$s\int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x-w)\,dx}{x^{s+1}}.$$

Das ist die zu (7) analoge Gleichung.

Also ergibt sich für $1 < \sigma < 2$:

$$\zeta(1-s, w) - (1-s)\int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x-w)}{x^{2-s}}\,dx = (1-s)\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} - s\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n(x-w)}{\pi n}.$$

Nunmehr beweist man genau wie in § 1, daß die Vertauschung der beiden unendlichen Prozesse gerechtfertigt ist, und erhält wie dort für $1 < \sigma < 2$:

$$\zeta(1-s, w) = (1-s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n w}{\pi n}\int_{0}^{\infty} x^{s-2} \sin 2\pi n x\,dx$$

$$- (1-s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n w}{\pi n}\int_{0}^{\infty} x^{s-2} \cos 2\pi n x\,dx$$

$$= (1-s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n w}{\pi n} \cdot \frac{\Gamma(s-1)\sin(s-1)\frac{\pi}{2}}{(2\pi n)^{s-1}}$$

$$- (1-s)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n w}{\pi n} \cdot \frac{\Gamma(s-1)\cos(s-1)\frac{\pi}{2}}{(2\pi n)^{s-1}}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\left\{\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n w}{n^s} + \sin\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n w}{n^s}\right\}.$$

Dieses Resultat gilt natürlich in der Halbebene $\sigma > 1$; die Funktion $\zeta(s, w)$ ist also in der ganzen s-Ebene regulär bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum 1, den man natürlich schon aus (21) findet.

Es sei nun w rational, also $w = \frac{l}{k}$, wo l und k positive ganze Zahlen sind und $l \leqq k$ ist. Dann ist für $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n w}{n^s} = \sum_{r=1}^{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi l}{k}(k\nu + r)}{(k\nu + r)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=1}^{k} \cos \frac{2\pi r l}{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\nu + \frac{r}{k}\right)^s}$$

$$= \frac{1}{k^s} \sum_{r=1}^{k} \cos \frac{2\pi r l}{k} \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right),$$

und ebenso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n w}{n^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=1}^{k} \sin \frac{2\pi r l}{k} \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right).$$

Also geht die gefundene Gleichung für $w = \frac{l}{k}$ in die folgende über:

(22)
$$\zeta(1-s, w)$$
$$= \frac{2}{(2\pi k)^s} \Gamma(s) \sum_{r=1}^{k} \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right) \left(\cos 2\pi r w \cdot \cos \frac{s\pi}{2} + \sin 2\pi r w \cdot \sin \frac{s\pi}{2}\right),$$

die natürlich nach dem vorangegangenen Resultat in der ganzen s-Ebene gilt.

§ 4.

Wir wollen nunmehr den folgenden Satz über Dirichletsche Reihen mit periodischen Koeffizienten beweisen:

Es sei für eine positive ganze Zahl k bei beliebigem ganzzahligen n die Gleichung

$$\chi(n+k) = \chi(n)$$

erfüllt, so daß die Koeffizienten der für $\sigma > 1$ absolut konvergenten Dirichletschen Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

die Periode k haben. Dann ist die Funktion $L(s)$ in der ganzen s-Ebene regulär bis auf den Pol erster Ordnung $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k} \chi(r)$, wenn dieser Ausdruck $\neq 0$ ist; sonst ist natürlich $L(s)$ eine ganze Funktion. Setzt man ferner:

(23)
$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{r=1}^{k} \chi(r) \cos \frac{2\pi r n}{k} = \chi_1(n), \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{r=1}^{k} \chi(r) \sin \frac{2\pi r n}{k} = \chi_2(n),$$

sowie

$$L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s}, \qquad L_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_2(n)}{n^s},$$

so daß auch die Koeffizienten dieser beiden Reihen die Periode k haben, so gilt in der ganzen s-Ebene die Funktionalgleichung

$$(24) \qquad L(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot k^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s) \left(\cos\frac{s\pi}{2} \cdot L_1(s) + \sin\frac{s\pi}{2} \cdot L_2(s) \right).$$

Beweis. Aus der Periodizität der Koeffizienten ergibt sich für $\sigma > 1$

$$(25) \qquad L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{k} \chi(r) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(k\nu + r)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=1}^{k} \chi(r)\, \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right);$$

hieraus aber folgt schon wegen unserer Resultate über $\zeta(s, w)$ die Fortsetzbarkeit der Funktion $L(s)$ über die ganze s-Ebene und ihr Verhalten an der Stelle $s = 1$. Weiter ergibt sich aus (25), (22) und (23)

$$\begin{aligned} L(1-s) &= k^{s-1} \sum_{l=1}^{k} \chi(l)\, \zeta\left(1-s, \frac{l}{k}\right) \\ &\quad - \frac{2\Gamma(s)}{k \cdot (2\pi)^s} \sum_{r=1}^{k} \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right) \left\{ \cos\frac{s\pi}{2} \sum_{l=1}^{k} \chi(l) \cos\frac{2\pi r l}{k} \right. \\ &\qquad \left. + \sin\frac{s\pi}{2} \sum_{l=1}^{k} \chi(l) \sin\frac{2\pi r l}{k} \right\} \\ &= -\frac{2\Gamma(s)}{k(2\pi)^s} \sum_{r=1}^{k} \zeta\left(s, \frac{r}{k}\right) \left\{ \cos\frac{s\pi}{2} \cdot \chi_1(r) + \sin\frac{s\pi}{2}\, \chi_2(r) \right\}; \end{aligned}$$

die nochmalige Anwendung von (25) liefert die behauptete Funktionalgleichung (24).

Hiernach kann man in (24) für s ganzzahlige Werte einsetzen oder auch Erörterungen über die Nullstellen der Funktionen $L(s)$ anknüpfen, wie das aus der Theorie der Charakterreihen bekannt ist, die natürlich die Hauptanwendung unseres Satzes bilden. Da für einen eigentlichen Charakter die eine der beiden Funktionen $\chi_1(n)$ und $\chi_2(n)$ für alle n verschwindet, während die andere sich von dem konjugierten Charakter $\bar{\chi}(n)$ nur um einen von n unabhängigen Faktor ε mit dem absoluten Betrag 1 unterscheidet, so erhält man aus (24) im Falle $\chi(-1) = 1$

$$L(1-s) = \frac{2\varepsilon}{(2\pi)^s} k^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s) \cos\frac{s\pi}{2}\, \bar{L}(s)$$

und im Falle $\chi(-1) = -1$

$$L(1-s) = \frac{2\varepsilon}{(2\pi)^s} k^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s) \sin\frac{s\pi}{2}\, \bar{L}(s),$$

so daß erst an dieser Stelle die Zurückführung auf einen eigentlichen Charakter und die Unterscheidung der beiden Fälle nötig ist.

Wendet man im allgemeinen Fall auf die Ausdrücke $L_1(s)$ und $L_2(s)$ in (24) noch einmal die Funktionalgleichung an, so ergibt sich natürlich eine Identität, da man

$$\chi_{11}(n) = \frac{1}{2}(\chi(n) + \chi(k-n)), \quad \chi_{22}(n) = \frac{1}{2}(\chi(n) - \chi(k-n)),$$

$$\chi_{12}(n) = \chi_{21}(n) = 0,$$

also

$$L_{11}(s) + L_{22}(s) = L(s), \quad L_{12}(s) = L_{21}(s) = 0$$

findet.

(Eingegangen am 6. September 1929.)

Zur Theorie der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte.

Von

I. Schur in Berlin.

Jeder unendlichen Folge

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{1}$$

reeller oder komplexer Zahlen lassen sich für $k = 1, 2, \ldots$ die Hölderschen Mittelwerte $h_n^{(k)}$ und die Cesàroschen Mittelwerte $c_n^{(k)}$ zuordnen. Man berechnet sie mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$h_n^{(1)} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \qquad h_n^{(k)} = \frac{h_1^{(k-1)} + h_2^{(k-1)} + \ldots + h_n^{(k-1)}}{n}$$

und

$$s_n^{(1)} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \qquad s_n^{(k)} = s_1^{(k-1)} + s_2^{(k-1)} + \ldots + s_n^{(k-1)},$$

$$c_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k-1}{k}}.$$

Für diese Mittelbildungen gilt bekanntlich der Knopp-Schneesche Äquivalenzsatz[1]): Für jeden Wert von k sind die Folgen $h_n^{(k)}$ und $c_n^{(k)}$ entweder beide konvergent oder beide divergent. Im Falle der Konvergenz ist

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty} c_n^{(k)}.$$

Man kann sich eine weitergehende Frage vorlegen: Es sei

$$p_1, p_2, p_3, \ldots \tag{2}$$

eine gegebene Folge von Null verschiedener reeller oder komplexer Größen Wie müssen diese Zahlen beschaffen sein, damit für jede Zahlenfolge (1)

[1]) K. Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Inauguraldissertation, Berlin 1907. W. Schnee, Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertsatzes, Math. Annalen 67 (1909), S. 110–125.

und für jeden Wert von k aus der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n^{(k)}}{p_n} = l_k$$

auch die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n^{(k)}}{p_n} = l_k'$$

folgt und umgekehrt?

Im folgenden werde ich beweisen:

I. *Dann und nur dann besitzt die Folge* (2) *die verlangte Eigenschaft, wenn sie den beiden Bedingungen genügt*:

1. *Es existiert der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n\, p_n} = a.$$

2. *Die Quotienten*

$$\frac{|p_1| + |p_2| + \ldots + |p_n|}{n\,|p_n|} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

liegen unterhalb einer endlichen Schranke.

Die Grenzwerte l_k und l_k' stehen zueinander in der Beziehung

$$l_k = \frac{(1+a)(1+2a)\ldots(1+(k-1)a)}{k!} \cdot l_k'. \quad (3)$$ [2])

Eine Zahlenfolge p_n, die unseren beiden Forderungen genügt, nenne ich im folgenden eine *Mittelfolge*, die Größe a den zugehörigen *Quotientenlimes*.

Daß der in (3) auftretende Faktor nicht Null sein kann, beruht auf folgender Regel:

II. *Der Quotientenlimes einer Mittelfolge ist entweder Null oder eine Größe mit positivem Realteil.*

Bemerkenswerte Spezialfälle liefern die Beispiele:

1. $p_n = n^\alpha$, $\Re(\alpha) > -1$, $a = \frac{1}{\alpha+1}$.
2. $p_n = \log^\alpha(n+1)$, α beliebig, $a = 1$.
3. $p_n = c^n$, $|c| \geqq 1$; für $c = 1$ wird $a = 1$, für $c \neq 1$ dagegen $a = 0$.
4. $p_n = n!$, $a = 0$.

Diese Beispiele zeigen insbesondere, daß die Hölderschen und Cesàroschen Mittelwerte in bezug auf ihr infinitäres Verhalten in enger Weise voneinander abhängen.

Aus dem Satze I läßt sich ein Satz über Potenzreihen ableiten, der sich als eine Ergänzung zu bekannten Sätzen von Abel, Frobenius, O. Hölder und Cesàro auffassen läßt.

[2]) Für $k = 1$ ist der hier auftretende Faktor durch 1 zu ersetzen.

III. *Es sei* (2) *eine Mittelfolge, die aus reellen positiven Zahlen besteht und deren Quotientenlimes a von Null verschieden ist. Die Reihe*

$$p(x) = p_1 + (p_2 - p_1)x + (p_3 - p_2)x^2 + \dots$$

ist dann für $|x| < 1$ *konvergent. Betrachtet man irgendeine Potenzreihe*

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots$$

und genügen die mit Hilfe der Partialsummen

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

gebildeten Hölderschen Mittelwerte $h_n^{(k)}$ *für irgendeinen Wert von k der Bedingung*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h_n^{(k)}}{p_n} = s,$$

so ist auch $f(x)$ *für* $|x| < 1$ *konvergent, und es wird bei radialer Annäherung an den Punkt* $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{p(x)} = \frac{s}{a^k}.$$

Der Beweis des Satzes I gelingt mit Hilfe der Methode, die ich beim Beweis des Knopp-Schneeschen Äquivalenzsatzes benutzt habe[3]). Er erfordert aber ein eingehendes Studium der Folgen, die hier als Mittelfolgen bezeichnet werden[3a]). Von Wichtigkeit ist hierbei insbesondere der Satz:

IV. *Sind* p_n *und* q_n *zwei Mittelfolgen mit den Quotientenlimites a und b, so bilden, sobald nicht beide Zahlen a und b gleich Null sind, auch die Größen* $n p_n q_n$ *eine Mittelfolge. Der zugehörige Quotientenlimes ist* $\frac{a b}{a + b}$. [4])

Im folgenden mache ich mehrfach von dem bekannten Satze über Reihentransformationen Gebrauch, den man (abgesehen von einer naheliegenden Verallgemeinerung) Herrn O. Toeplitz[5]) verdankt:

---

[3]) Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Annalen **74** (1913), S. 447–458.

[3a]) Einen kürzeren Beweis werde ich demnächst in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft veröffentlichen.

[4]) Für reelle positive Zahlen p_n und q_n findet sich dieser Satz als eine (von mir herrührende) Aufgabe schon bei G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, S. 12. — Der einfache Beweis, den die Verfasser auf S. 166 angeben, scheint sich auf beliebige Werte von p_n und q_n nicht ohne weiteres übertragen zu lassen.

[5]) O. Toeplitz, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace matematyczno-fisyczne **22** (1911), S. 113–119. — Vgl. auch T. Kojima, On generalized Toeplitz's theorem on limit and their applications, Tôhoku Math. Journal **12** (1917), S. 291–326, und I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journal für die r. u. a. Mathematik **151** (1921), S. 79–111.

V. *Eine lineare Transformation*

$$v_n = a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + \ldots + a_{nn} u_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist dann und nur dann konvergenzerhaltend, wenn

1. *der Grenzwert*

$$\lim_{n \to \infty} (a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn}) = a$$

existiert;

2. *die „Zeilennormen"*

$$|a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{nn}|$$

beschränkt sind;

3. *die „Kolonnenlimites"*

$$a_\nu = \lim_{n \to \infty} a_{n\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

existieren.

Sind insbesondere die Zahlen a_ν sämtlich gleich Null, so folgt aus $\lim_{n \to \infty} u_n = u$ stets $\lim_{n \to \infty} v_n = a u$.

Weiß man nur, daß die $a_{n\nu}$ den Bedingungen 2. und 3. genügen, so konvergiert die Folge v_n für jede Nullfolge u_n. Sind insbesondere alle Zahlen a_ν gleich Null, so ist auch v_n eine Nullfolge.

§ 1.

Einige Eigenschaften der Mittelfolgen.

1. *Für jede Mittelfolge p_n ist $\sum_{n=1}^{\infty} |p_n|$ divergent und*

$$\lim_{n \to \infty} n |p_n| = \infty. \tag{4}$$

Ist nämlich

$$\frac{|p_1| + |p_2| + \ldots + |p_n|}{n |p_n|} < M,$$

so wird

$$|p_n| > \frac{|p_1|}{M} \cdot \frac{1}{n}, \qquad n |p_n| > \frac{1}{M} (|p_1| + |p_2| + \ldots + |p_n|).$$

Die erste Ungleichung zeigt, daß $\sum |p_n|$ divergent sein muß, und hieraus folgt auf Grund der zweiten Ungleichung, daß (4) gilt.

2. *Sind $p_1, p_2, \ldots$ von Null verschiedene Größen, so stellt die lineare Transformation*

$$v_n = \frac{p_1 u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_n u_n}{n p_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dann und nur dann eine konvergenzerhaltende Operation dar, wenn die p_n eine Mittelfolge bilden. Ist a der Quotientenlimes der Mittelfolge, so folgt aus $\lim u_n = u$ stets $\lim v_n = a u$.

Dies folgt unmittelbar aus dem Satze V in Verbindung mit dem in Nr. 1 Gesagten.

3. Zwei Zahlenfolgen x_n und $y_n = c_n x_n$ mögen einander *äquivalent* heißen, wenn die Faktoren c_n von Null verschieden sind und gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert konvergieren. Wir schreiben dann $y_n \sim x_n$.

Ist nun p_n eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes a, so gilt dasselbe auch für jede äquivalente Folge $q_n \sim p_n$.

Denn wegen Nr. 2 folgt aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n\, p_n} = a \quad \text{auch} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}{n\, q_n} = a.$$

Außerdem sind offenbar die Quotienten

$$\frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}{n\, q_n}$$

beschränkt, wenn die mit Hilfe der p_n gebildeten Quotienten diese Eigenschaft haben.

4. *Jede Mittelfolge p_n ist einer Mittelfolge q_n äquivalent, in der alle Summen $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ von Null verschieden sind.*

Dies ist völlig trivial. Denn wählt man eine beliebige Größe ε, die von den abzählbar vielen Zahlen

$$(5) \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

verschieden ist, so genügt es

$$q_1 = p_1 - \varepsilon, \quad q_2 = p_2, \quad q_3 = p_3, \ldots$$

zu setzen.

5. Nehmen wir an, es sei p_n eine Mittelfolge mit lauter von Null verschiedenen Summen (5), so sind auch die Ausdrücke

$$a'_n = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n\, p_n}$$

sämtlich von Null verschieden. Es wird dann $a'_1 = 1$ und für $n > 1$

$$n\, p_n a'_n - (n-1)\, p_{n-1} a'_{n-1} = p_n,$$

also

$$(6) \qquad (n a'_n - 1)\, p_n = (n-1)\, a'_{n-1} p_{n-1}.$$

Hierbei wird wegen $a'_{n-1} \neq 0$ auch $n a'_n - 1 \neq 0$. Die Formel (6) liefert, wie man leicht erkennt,

$$p_2 = \frac{p_1}{2a'_2 - 1}, \qquad p_n = \frac{p_1 \cdot 2a'_2 \cdot 3a'_3 \ldots (n-1) a'_{n-1}}{(2a'_2 - 1)(3a'_3 - 1) \ldots (n a'_n - 1)} \qquad (n > 2).$$

Setzt man $\frac{1}{a_n'} = a_n$, so läßt sich das einfacher in der Form

$$p_n = p_1 \cdot \frac{a_n}{n} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1 - \frac{a_\nu}{\nu}} \qquad (n > 1)$$

schreiben.

Wir können also sagen: *Jede Mittelfolge p_n mit dem Quotientenlimes a ist einer Mittelfolge*

$$p_1' = 1, \quad p_n' = \frac{a_n}{n} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1 - \frac{a_\nu}{\nu}} \qquad (n > 1)$$

äquivalent, wobei die a_n $(n > 1)$ Zahlen sind, die den Bedingungen

$$(7) \qquad a_n \neq 0, \quad a_n \neq n, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = a$$

genügen.

6. *Für jede Mittelfolge p_n mit von Null verschiedenem Quotientenlimes a ist*

$$(8) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = 1.$$

Denn dies gilt offenbar für die Ausdrücke p_n', also wegen $p_n \sim p_n'$ auch für die p_n.

Daß die Formel (8) für $a = 0$ nicht immer zu gelten braucht, zeigen die Beispiele

$$p_n = c^n, \quad |c| > 1, \quad p_n = n!.$$

7. Ist wieder $a \neq 0$, so bilden die in Nr. 5 eingeführten Größen a_n eine konvergente Zahlenfolge. Hieraus folgt insbesondere, daß die Ausdrücke

$$e^{\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n}} \cdot \prod_{\nu=2}^{n} \left(1 - \frac{a_\nu}{\nu}\right)$$

mit wachsendem n einem von Null verschiedenem Grenzwert zustreben. Die Zahlenfolge p_n ist dann der Folge

$$p_1'' = 1, \quad p_n'' = \frac{1}{n} e^{\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n}}$$

äquivalent, weil dies offenbar für die Ausdrücke p_n' gilt.

Sind nun aber die p_n, also auch die p_n'' eine Mittelfolge, so läßt sich eine Schranke M angeben, für die

$$\frac{|p_1''| + |p_2''| + \ldots + |p_n''|}{n\,|p_n''|} < M$$

wird. Dies liefert

$$|p_1''| + |p_2''| + \ldots + |p_{n-1}''| < (nM - 1)\,|p_n''|$$

und hieraus folgt wegen $p_1'' = 1$

$$|p_2''| > \frac{1}{2M-1}, \qquad |p_3''| > \frac{|p_1''| + |p_2''|}{3M-1} > \frac{2M}{(2M-1)(3M-1)}$$

usw. Allgemein ergibt sich

$$|p_n''| > \frac{2M \cdot 3M \cdot \ldots \cdot (n-1)M}{(2M-1)(3M-1)\ldots(nM-1)}.$$

Setzt man $\frac{1}{M} = m$, so läßt sich das in der Form

$$|p_n''| > \frac{m}{n} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1-\frac{m}{\nu}} \sim \frac{1}{n} e^{m\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}$$

schreiben. Folglich kann eine positive Konstante K angegeben werden, für die

$$|p_n''| > \frac{K}{n} e^{m\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} \tag{9}$$

wird.

Hieraus folgt leicht, daß bei uns $\Re(a) > 0$ sein muß. Denn andernfalls wäre, wenn $\Re(a_\nu) = \alpha_\nu$ gesetzt wird, auch

$$\lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = \Re\left(\frac{1}{a}\right) \leqq 0.$$

Es ließe sich daher insbesondere eine ganze Zahl $h \geqq 2$ bestimmen, so daß für $\nu > h$

$$\alpha_\nu < \frac{m}{2}$$

wird. Dann wäre für $n > h$

$$|p_n''| = \frac{1}{n} e^{\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{3}+\ldots+\frac{\alpha_n}{n}} < \frac{1}{n} e^{\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{3}+\ldots+\frac{\alpha_h}{h}} \cdot e^{\frac{m}{2}\left(\frac{1}{h+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}.$$

Aus (9) würde nun

$$e^{\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{3}+\ldots+\frac{\alpha_h}{h}} > K \cdot e^{m\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{h}\right)} \cdot e^{\frac{m}{2}\left(\frac{1}{h+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}$$

folgen. Das ist aber nicht möglich, weil der rechts stehende Ausdruck mit wachsendem n über alle Grenzen wächst.

Daß unsere Zahl a jeden Wert mit positivem Realteil annehmen kann, zeigt schon das Beispiel

$$p_n = n^\alpha, \qquad \Re(\alpha) > -1, \qquad a = \frac{1}{\alpha+1}.$$

In § 4 werden wir ein einfaches Verfahren zur Herleitung aller Mittelfolgen mit von Null verschiedenem Quotientenlimes kennenlernen.

8. Wir kommen nun zum Beweis des Satzes IV (vgl. Einleitung).

Die gegebenen Mittelfolgen dürfen hierbei offenbar durch beliebige

äquivalente Folgen ersetzt werden (vgl. Nr. 3). Insbesondere darf angenommen werden, es sei schon

$$(10)\quad p_1 = q_1 = 1, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n \neq 0, \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_n \neq 0.$$

Daß nun die Quotienten

$$(11)\quad F_n = \frac{|p_1 q_1| + 2|p_2 q_2| + \ldots + n|p_n q_n|}{n \cdot n |p_n q_n|}$$

jedenfalls nach oben beschränkt sind, ist leicht zu erkennen (vgl. Pólya-Szegö, a. a. O., S. 106). Ist nämlich etwa $a \neq 0$, so läßt sich eine positive Zahl K angeben, so daß für alle n

$$\left|\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n\, p_n}\right| > K$$

wird. Dann ist insbesondere für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\nu |p_\nu| < \frac{1}{K}\left(|p_1| + |p_2| + \ldots + |p_\nu|\right) \leqq \frac{1}{K}\left(|p_1| + |p_2| + \ldots + |p_n|\right).$$

Hieraus folgt

$$F_n < \frac{1}{K} \cdot \frac{|p_1| + |p_2| + \ldots + |p_n|}{n\,|p_n|} \cdot \frac{|q_1| + |q_2| + \ldots + |q_n|}{n\,|q_n|}.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist aber nach oben beschränkt, weil das für die hier auftretenden Faktoren der Fall sein soll.

Um noch zu beweisen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 q_1 + 2 p_2 q_2 + \ldots + n p_n q_n}{n \cdot n\, p_n q_n} = \frac{a\,b}{a+b}$$

wird, stelle man, was nach Nr. 5 wegen (10) möglich ist, p_n und q_n in der Form

$$p_n = \frac{a_n}{n} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1 - \frac{a_\nu}{\nu}}, \qquad q_n = \frac{b_n}{n} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1 - \frac{b_\nu}{\nu}} \qquad (n > 1)$$

dar, wobei

$$a_n \neq 0, \quad a_n \neq n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = a; \qquad b_n \neq 0, \quad b_n \neq n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = b$$

sein soll. Es wird dann, wenn

$$\left(1 - \frac{a_\nu}{\nu}\right)\left(1 - \frac{b_\nu}{\nu}\right) = 1 - \frac{c_\nu}{\nu}$$

gesetzt wird,

$$c_\nu = a_\nu + b_\nu - \frac{a_\nu b_\nu}{\nu}$$

und

$$(12)\quad n\, p_n q_n = \frac{a_n b_n}{n} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1 - \frac{c_\nu}{\nu}}.$$

Da nun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{n}\right)=a+b$$

wird und (vgl. Nr. 7)

$$\Re(a+b)=\Re(a)+\Re(b)>0$$

ist, so läßt sich eine ganze Zahl h angeben, so daß $c_n\neq 0$ für $n>h$ wird. Es darf also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{b_n}+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{n}}=\frac{ab}{a+b} \tag{13}$$

geschrieben werden. Setzt man nun

$$r_1=1,\qquad r_n=\frac{c_n}{n}\prod_{\nu=2}^{n}\frac{1}{1-\frac{c_\nu}{\nu}},$$

so wird für $n>h$

$$r_1+r_2+\ldots+r_n=\prod_{\nu=2}^{n}\frac{1}{1-\frac{c_\nu}{\nu}}=\frac{n\,r_n}{c_n},$$

also wegen (13)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_1+r_2+\ldots+r_n}{n\,r_n}=\frac{ab}{a+b}. \tag{14}$$

Die Formel (12) liefert aber

$$r_n=\frac{c_n}{a_n b_n}\cdot n\,p_n q_n,$$

und die Faktoren $\frac{c_n}{a_n b_n}$ sind für $n>h$ von Null verschieden und streben dem von Null verschiedenen Limes $a+b$ zu. Aus der Beschränktheit der Ausdrücke (11) folgt daher auch die der Ausdrücke

$$\frac{r_1+|r_2|+\ldots+|r_n|}{n\,|r_n|}.$$

Kommen nun unter den Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_h$ Nullen vor, so ersetze man sie durch beliebige von Null verschiedene Werte, ohne die Größen $r_{h+1}, r_{h+2}, \ldots$ zu ändern. Man erhält dann eine Zahlenfolge, die wegen (14) als eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes $\frac{ab}{a+b}$ zu bezeichnen ist. Dasselbe gilt für die hierzu äquivalente Folge $n\,p_n q_n$.

Damit ist unser Satz bewiesen. Es ist aber zu beachten, daß wenn beide Zahlen a und b gleich Null sind, die Zahlen $n\,p_n q_n$ durchaus nicht immer eine Mittelfolge zu bilden brauchen. Das erkennt man, indem man für p_n die Folge

$$1, 2, -1, -2, 1, 2, -1, -2, \ldots$$

wählt und $q_n=p_n$ setzt.

§ 2.

Beweis des Satzes I.

Es sei

$$p_1, p_2, \cdots$$

eine gegebene Folge von Null verschiedener Zahlen. Jeder linearen Transformation

$$(A) \qquad v_n = a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + \ldots + a_{nn} u_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ordne man die lineare Transformation

$$(A^*) \qquad v_n = \frac{1}{p_n}[a_{n1} p_1 u_1 + a_{n2} p_2 u_2 + \ldots + a_{nn} p_n u_n]$$

zu. Es handelt sich offenbar um den Übergang von A zu der ähnlichen Transformation $A^* = P^{-1} A P$, wobei P die Substitution $v_n = p_n u_n$ bedeutet. Daher ist für je zwei Transformationen A und B

$$(AB)^* = A^* B^*$$

und, wenn A^{-1} existiert, d. h. alle a_{nn} von Null verschieden sind,

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Sind nun $h_n^{(k)}$ und $c_n^{(k)}$ die Hölderschen bzw. Cesàroschen Mittelwerte, die zu der Folge x_n gehören, so sei A_k die lineare Transformation, welche die $c_n^{(k)}$ in die $h_n^{(k)}$ überführt, also

$$(h_n^{(k)}) = A_k (c_n^{(k)}).$$

Dann wird

$$(15) \qquad \left(\frac{h_n^{(k)}}{p_n}\right) = A_k^* \left(\frac{c_n^{(k)}}{p_n}\right).$$

Unsere Aufgabe ist nun offenbar so zu formulieren: Für welche Folgen p_n sind die Transformationen A_k^* und $(A_k^{-1})^*$ bei beliebigem k konvergenzerhaltende Operationen?

Die Beantwortung dieser Frage wird wesentlich erleichtert durch die Tatsache, daß, wenn M die Mittelbildung

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n},$$

E die Identität bedeuten und

$$S_h = \frac{1}{h} E + \frac{h-1}{h} M \qquad (h = 2, 3, \ldots)$$

gesetzt wird, A_k die Form

$$A_k = S_2 S_3 \ldots S_k$$

hat (vgl. meine Arbeit Math. Annalen **74**, S. 452). Das liefert

$$A_k^* = S_2^* S_3^* \dots S_k^*. \tag{16}$$

Hierbei wird S_h^* die lineare Transformation

$$v_n^{(h)} = \frac{1}{h} u_n + \frac{h-1}{h} \cdot \frac{p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n}{n\, p_n}. \tag{17}$$

Insbesondere muß $A_2^* = S_2^*$ eine konvergenzerhaltende Operation sein. Dies erfordert aber (vgl. § 1, Nr. 2), daß die zu betrachtenden Zahlen p_n eine Mittelfolge bilden.

Ist diese Bedingung aber erfüllt, so sind alle Operationen S_h^* konvergenzerhaltend, folglich besitzt auch A_k^* diese Eigenschaft. Damit ist schon bewiesen, daß aus der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_n^{(k)}}{p_n} = l_k' \tag{18}$$

auch die von

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h_n^{(k)}}{p_n} = l_k \tag{19}$$

folgt. Da sich ferner für S_h^* in (17) aus $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$

$$\lim_{n \to \infty} v_n^{(h)} = \frac{1}{h} u + \frac{h-1}{h} \cdot a\, u$$

ergibt, so liefern (15) und (16), wie zu beweisen ist,

$$l_k = \frac{1+a}{2} \cdot \frac{1+2a}{3} \cdots \frac{1+(k-1)a}{k} \cdot l_k'.$$

Hier bedeutet die Zahl a wie immer den Quotientenlimes der Mittelfolge p_n.

Um zu beweisen, daß umgekehrt aus (19) auch (18) folgt, genügt es zu zeigen, daß $(S_h^{-1})^*$ für jedes $h \geqq 2$ eine konvergenzerhaltende Operation ist. Dies folgt aus dem allgemeineren Satze:

VI. *Ist α eine beliebige komplexe Größe, die im Innern des um den Punkt $\frac{1}{2}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ beschriebenen Kreises liegt, und setzt man*

$$S = \alpha E + (1-\alpha) M,$$

so wird $(S^{-1})^*$ für jede Mittelfolge p_n eine konvergenzerhaltende Operation.

Der Beweis beruht auf den Formeln, die ich in meiner Arbeit Math. Annalen **74**, S. 454 angegeben habe. Dort wird gezeigt, daß die lineare Transformation S^{-1} in der Form

$$v_n = a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + \dots + a_{nn} u_n$$

geschrieben werden kann, wobei für

$$\beta = \frac{1}{\alpha}, \qquad G_m(\beta) = \frac{(m-1)!\, m^\beta}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)}$$

die Koeffizienten $a_{n\nu}$ aus den Formeln

$$a_{n1} = (\beta - \beta^2)\frac{G_n(\beta)}{n^\beta}, \qquad a_{nn} = \frac{n}{1+\alpha(n-1)},$$

$$a_{n\nu} = (\beta - \beta^2)\frac{(\nu-1)^{\beta-1} G_n(\beta)}{n^\beta G_{\nu-1}(\beta)} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-1)$$

zu berechnen sind.

Setzt man nun

$$u_1' = u_1, \qquad u_2' = \frac{1}{2^{\beta-1}} \cdot \frac{u_2}{G_1(\beta)}, \qquad u_3' = \frac{2^{\beta-1}}{3^{\beta-1}} \frac{u_3}{G_2(\beta)}, \quad \ldots$$

und

$$(T) \qquad v_n' = \frac{1}{n^\beta p_n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta-1} p_\nu u_\nu',$$

so wird, wie man leicht sieht, $(S^{-1})^*$ die lineare Transformation

$$v_n = (\beta - \beta^2) G_n(\beta) \left[v_n' - \frac{u_n}{n} \right] + \frac{n}{1+\alpha(n-1)} \cdot u_n.$$

Da nun aus

$$\lim_{n\to\infty} G_n(\beta) = \Gamma(\beta) \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^{\beta-1}}{n^{\beta-1}} = 1$$

folgt, daß die Folgen u_n und u_n' gleichzeitig konvergent oder divergent sind, so ist offenbar die Operation $(S^{-1})^*$ dann und nur dann konvergenzerhaltend, wenn das für T (als eine auf die u_n' anzuwendende Transformation) der Fall ist. Damit aber T konvergenzerhaltend sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Zahlen

$$p_n' = n^{\beta-1} p_n$$

eine Mittelfolge bilden (vgl. wieder § 1, Nr. 2). Unter der über α gemachten Voraussetzung ist diese Bedingung jedenfalls erfüllt. Denn es wird dann

$$\Re(\beta) = \Re\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 1, \qquad \text{also} \quad \Re(\beta - 2) > -1.$$

Folglich wird $q_n = n^{\beta-2}$ eine Mittelfolge mit dem von Null verschiedenen Quotientenlimes $\frac{1}{\beta-1}$. Nach Satz IV ist daher auch $p_n' = n\, p_n q_n$ eine Mittelfolge.

§ 3.

Beweis des Satzes III.

Ist p_n eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes a, so ist

$$M(p_n) = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} = a\, p_n + p_n \varepsilon_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Hieraus folgt schrittweise, weil nach § 1, Nr. 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(p_n\varepsilon_n)}{p_n}=0$$

ist,

$$M^2(p_n)=a\,M(p_n)+M(p_n\varepsilon_n)$$
$$=a^2p_n+p_n\varepsilon_n^{(2)},\qquad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n^{(2)}=0$$

usw., allgemein

$$M^k(p_n)=a^kp_n+p_n\varepsilon_n^{(k)},\qquad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n^{(k)}=0\,.$$

Das liefert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M^k(p_n)}{p_n}=a^k$$

und hieraus folgt, wenn $\gamma_n^{(k)}$ den zu der Folge p_n gehörenden Cesàroschen Mittelwert bedeutet, nach Satz I

$$(20)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n^{(k)}}{p_n}=\frac{a^k}{\delta_k},\qquad \delta_k=\frac{(1+a)(1+2a)\dots(1+(k-1)a)}{k!},\qquad \delta_1=1.$$

Setzt man nun

$$p(x)=p_1+(p_2-p_1)x+(p_3-p_2)x^2+\dots,$$

so wird bekanntlich

$$(21)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\gamma_n^{(k)}x^{n-1}=(1-x)^{-k-1}p(x).$$

Ist insbesondere $a\neq 0$, so ist (nach § 1, Nr. 6) $\lim\frac{p_n}{p_{n-1}}=1$, daher ist

$$p_1+p_2x+p_3x^2+\dots=(1-x)^{-1}p(x)$$

und folglich auch $p(x)$ für $|x|<1$ konvergent.

Betrachtet man nun eine beliebige Potenzreihe

$$f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\dots,$$

setzt

$$s_n=a_1+a_2+\dots+a_n$$

und versteht unter $h_n^{(k)}$ und $c_n^{(k)}$ die zu der Folge s_n gehörenden Hölderschen und Cesàroschen Mittelwerte, so wird insbesondere

$$(22)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}c_n^{(k)}x^{n-1}=(1-x)^{-k-1}f(x).$$

Nehmen wir an, es sei für irgendeinen Wert $k=1,2,\dots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_n^{(k)}}{p_n}=s,$$

so wird nach Satz I

$$(23)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n^{(k)}}{p_n}=\frac{s}{\delta_k}.$$

Dividiert man nun den n-ten Koeffizienten der Reihe (22) durch den n-ten Koeffizienten der Reihe (21), so erhält man

$$\frac{c_n^{(k)}}{\gamma_n^{(k)}} = \frac{c_n^{(k)}}{p_n} : \frac{\gamma_n^{(k)}}{p_n},$$

also wegen (20) und (23)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n^{(k)}}{\gamma_n^{(k)}} = \frac{s}{a^k}.$$

Sind nun insbesondere die Zahlen p_n reell und positiv, so gilt dasselbe für die Koeffizienten der Reihe (21). Außerdem ist diese Reihe, wie aus (20) in Verbindung mit

$$\lim_{n\to\infty} (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) = \infty$$

folgt, für $x = 1$ divergent. Auf Grund eines bekannten Satzes von Cesàro (vgl. etwa Pólya-Szegö, a. a. O. S. 15, Aufgabe 88) ergibt sich hieraus, daß die Reihe (22), demnach auch $f(x)$ für $|x| < 1$ konvergiert und daß bei radialer Annäherung

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^{-k-1} f(x)}{(1-x)^{-k-1} p(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{p(x)} = \frac{s}{a^k}$$

wird. — Damit ist unser Satz III vollständig bewiesen[6]).

Ein bemerkenswertes Beispiel liefern die Zahlen

$$p_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Sie bilden wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\log(n+1)} = 1$$

eine Mittelfolge mit $a = 1$. Hierbei wird

$$p(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots = -\frac{\log(1-x)}{x}.$$

Der Satz III liefert also in diesem Fall: Ist $f(x)$ eine Potenzreihe, für welche die Hölderschen Mittelwerte $h_n^{(k)}$ einer beliebigen Ordnung k der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n^{(k)}}{\log(n+1)} = s$$

genügen, so ist $f(x)$ für $|x| < 1$ konvergent und bei radialer Annäherung wird

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{\log \frac{1}{1-x}} = s.$$

---

[6]) Setzt man wie üblich $c_n^{(0)} = s_n$, so gilt der Satz auch für $k = 0$. Er liefert in diesem Fall aber nur eine spezielle Anwendung des Cesàroschen Satzes. Die Voraussetzung, daß die p_n eine Mittelfolge mit $a > 0$ bilden sollen, ist erst für $k > 0$ von wesentlicher Bedeutung.

§ 4.

Weitere Sätze über Mittelfolgen.

Wir haben schon in § 1 gesehen, daß jede Mittelfolge p_n mit von Null verschiedenem Quotientenlimes a einer Folge

$$q_1 = 1, \quad q_n = \frac{1}{n} e^{\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n}} \qquad (n > 1) \tag{24}$$

äquivalent ist, wobei die a_n gegen $\frac{1}{a}$ konvergieren. Außerdem wissen wir, daß $\Re(a) > 0$ sein muß. Es gilt aber auch der umgekehrte Satz:

VII. *Für jede konvergente Zahlenfolge*

$$a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

deren Grenzwert b einen positiven Realteil hat, bilden die Zahlen (24) *eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes* $\frac{1}{b}$.

Um dies zu erkennen, ändere man, was jedenfalls möglich ist, endlich viele der Zahlen a_n in der Weise ab, daß eine neue Folge

$$b_2, b_3, b_4, \ldots$$

entsteht, deren Realteile

$$\beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots$$

den Bedingungen

$$\beta_n \neq 0, \quad \beta_n \neq n$$

genügen. Die Folge q_n ist dann der Folge

$$r_1 = 1, \quad r_n = \frac{1}{n} e^{\frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \ldots + \frac{b_n}{n}}$$

äquivalent. Er wird hierbei von selbst

$$b_n \neq 0, \quad b_n \neq n, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b.$$

Die Folge r_n ist nun der Folge

$$s_1 = 1, \quad s_n = \frac{b_n}{n} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1 - \frac{b_\nu}{\nu}} \qquad (n > 1)$$

äquivalent. Hier wird

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1 - \frac{b_\nu}{\nu}} = \frac{n s_n}{b_n},$$

also gewiß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n s_n} = \frac{1}{b}. \tag{25}$$

Ferner ist

$$|s_n| \sim |r_n| = \frac{1}{n} e^{\frac{\beta_2}{2}+\frac{\beta_3}{3}+\ldots+\frac{\beta_n}{n}} \sim t_n,$$

wobei

$$t_1 = 1, \qquad t_n = \frac{\beta_n}{n} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1-\frac{\beta_\nu}{\nu}}$$

zu setzen ist. Man schließt wie vorhin für die s_n, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_1+t_2+\ldots+t_n}{n\,t_n} = \frac{1}{\beta} \qquad (\beta = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \Re(b))$$

ist. Jedenfalls sind also diese Quotienten nach oben beschränkt. Wegen $|s_n| \sim t_n$ gilt dasselbe auch für die Ausdrücke

$$\frac{|s_1|+|s_2|+\ldots+|s_n|}{n\,|s_n|}.$$

Da außerdem (25) gilt, so bilden die s_n eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes $\frac{1}{b}$. Wegen $q_n \sim s_n$ haben also auch die q_n diese Eigenschaft.

In Verbindung mit dem am Anfang des Paragraphen Gesagten ergibt sich also:

VIII. *Man erhält alle Mittelfolgen p_n mit von Null verschiedenem Quotientenlimes und nur solche, indem man für alle konvergenten Zahlenfolgen a_n und c_n, die den Bedingungen*

$$\lim_{n\to\infty} \Re(a_n) > 0, \qquad c_n \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n \neq 0$$

genügen,

$$p_n = \frac{c_n}{n} e^{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

setzt. Der zu (26) *gehörende Quotientenlimes ist gleich dem reziproken Werte von* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

IX. *Bilden die Zahlen p_n eine Mittelfolge mit dem von Null verschiedenen Quotientenlimes a, so stellen auch die absoluten Beträge $|p_n|$ eine Mittelfolge dar. Ihr Quotientenlimes ist gleich dem reziproken Werte des Realteils von* $\frac{1}{a}$.

Für $a = 0$ brauchen dagegen die als beschränkt anzunehmenden Quotienten

$$\frac{|p_1|+|p_2|+\ldots+|p_n|}{n\,|p_n|}$$

durchaus nicht immer zu konvergieren. Dies zeigt schon das Beispiel

$$1, 2, -1, -2, 1, 2, -1, -2, \ldots.$$

Es sei noch bemerkt, daß auf Grund des Satzes VIII unser Satz IV für den Fall, daß die Quotientenlimites a und b der gegebenen Mittelfolgen p_n und q_n beide von Null verschieden sind, als trivial erscheint. Denn haben p_n und q_n die Form (26), so erscheint auch $n p_n q_n$ als analog gebildeter Ausdruck, wobei an Stelle von a und b die Zahl

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}$$

tritt. Ist aber eine der Zahlen a, b gleich Null, so versagt diese Schlußweise.

Zum Schluß noch ein Nachtrag zum Satze I. Ist p_n eine Mittelfolge mit dem Quotientenlimes a, und gilt für eine Folge x_n und für irgendeinen Wert $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n^{(k)}}{p_n} = l_k,$$

so bedeutet das nur, daß

$$M^k(x_n) = l_k p_n + p_n \varepsilon_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

wird. Hieraus folgt (vgl. § 3)

$$h_n^{(k+1)} = M^{k+1}(x_n) = l_k M(p_n) + M(p_n \varepsilon_n) = l_k a \cdot p_n + p_n \eta_n, \quad \lim_{n\to\infty} \eta_n = 0,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n^{(k+1)}}{p_n} = l_k a. \tag{27}$$

Der Satz I lehrt nun, daß eine Gleichung der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n^{(k)}}{p_n} = l_k' \tag{28}$$

die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n^{(k+1)}}{p_n} = l_k' \cdot \frac{a}{1+ka}$$

nach sich zieht.

Wenn also insbesondere $a = 0$ ist, so folgt aus (27) und (28), daß die Ausdrücke

$$\frac{h_n^{(k+l)}}{p_n}, \qquad \frac{c_n^{(k+l)}}{p_n} \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

mit wachsendem n gegen Null konvergieren. Dies zeigt, wie auch aus dem Früheren hervorgeht, daß die Mittelfolgen mit $a = 0$ einen Sonderfall darstellen, der sich von dem Falle $a \neq 0$ wesentlich unterscheidet.

(Eingegangen am 29. September 1929.)

Über die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist.

Von

Hugo Steinhaus in Lwów (Polen).

E. Borel hat bereits im Jahre 1896 den Satz aufgestellt, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe mit willkürlichen Koeffizienten zugleich eine natürliche Grenze für die dargestellte Funktion bildet, d. h. aus lauter singulären Punkten besteht, gleich 1 ist[1]).

Dieser Satz ist eigentlich bloß eine Plausibilitätsbetrachtung (wie es damals auch kaum anders sein konnte); ganz *willkürlich* können ja die Koeffizienten nicht gewählt werden, denn schon eine solche Wahl eines *einzigen* Koeffizienten aus der *ganzen* komplexen Ebene erfordert die Angabe einer „Wahrscheinlichkeitsfunktion". Ist aber der Satz so gemeint, daß (etwa) die Beträge der Koeffizienten fest bleiben, deren Argumente dagegen dem Zufall unterworfen werden, so ist er eines Beweises fähig. Spätere Arbeiten von G. Pólya[2]), M. Fréchet[3]), F. Hausdorff[4]), G. Szegö[5]) und O. Szász[6]) bringen teils Tatsachen aus der Topologie eines bestimmten Funktionenraumes, teils interessante Sätze über die Mächtigkeit der Menge

[1]) E. Borel, Sur les séries de Taylor, C. R. **123** (1896), S. 1051–1052. Vgl. auch Acta Math. **22** (1897), S. 243–248 und Journ. d. Math. (5) **2** (1896), S. 441–451. Der ursprüngliche Wortlaut ist von dem unsrigen verschieden.

[2]) G. Pólya, Über die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist. Acta Math. **41** (1917), S. 99—118.

[3]) M. Fréchet, Les fonctions prolongeables. C. R. **165** (1917), S. 669—670.

[4]) F. Hausdorff, Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen. Math. Zeitschr. **4** (1919), S. 98–103.

[5]) G. Szegö, Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Berl. Berichte 1922, S. 88–91.

[6]) O. Szász, Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches. Math. Annalen **85** (1922), S. 99–110.

von fortsetzbaren Potenzreihen, wenn z. B. alles bis auf das Vorzeichen der Koeffizienten bestimmt ist. Wahrscheinlichkeitsfragen behandeln sie nicht.

Hier soll der Borelsche Satz in § 1, ein verwandter Satz in § 2 bewiesen werden. Das Spiel, welches die Koeffizienten liefert, wird wahrscheinlichkeitstheoretisch definiert, indem die üblichen Postulate der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Anwendung gelangen. Unter dem „üblichen" Postulatensystem verstehen wir dasjenige, welches bei allen klassischen Aufgaben, wo das Spiel als Ganzes (also nicht bloß endlichviele Partien) betrachtet werden muß, mehr oder weniger stillschweigend benutzt wird. (Eine solche Aufgabe ist z. B. die des Ruins der Spieler.) Es ist danach selbstverständlich, daß das Postulat der totalen Wahrscheinlichkeit auf abzählbar-unendlichviele Summanden ausgedehnt werden muß. Dieses System, mit erläuternden Bemerkungen versehen, bildet den Inhalt von § 3. Wir haben es vorgezogen, die Beweise in § 1 und § 2 so zu führen, als ob die Wahrscheinlichkeitsrechnung intuitiv klar wäre (was sie auch im hohen Grade ist).

§ 1.

Fragestellung I.

Es sei eine feste Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{1}$$

mit dem Konvergenzradius 1 [7]) gegeben; wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i \varphi_n} z^n \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{2}$$

und denken uns die „Phasen" φ_n als Zentriwinkel von Punkten, die auf einem Kreise vom Umfang 1 (auf dem „Phasenkreise") liegen (φ_n ist also durch die Wahl eines solchen Punktes nur bis auf einen ganzzahligen additiven Term bestimmt). Die Wahrscheinlichkeit der Zugehörigkeit eines Punktes auf diesem Kreise zu einer (auf demselben Kreise liegenden) Punktmenge L soll das Lebesguesche [8]) (als vorhanden vorausgesetzte) Maß $|L|$ der Menge L sein.

Es wird gefragt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Reihe (2) den Konvergenzkreis $|z| = 1$ zur natürlichen Grenze hat, wenn die Phasenpunkte aus dem Phasenkreise unabhängig voneinander gelost werden?

[7]) Der Radius könnte beliebig (aber endlich, $\neq 0$) sein.

[8]) Eigentlich ist es das Lebesgue-Carathéodorysche Maß.

Überwinden wir die prinzipiellen wahrscheinlichkeitstheoretischen Bedenken und wenden wir den Wahrscheinlichkeitskalkül an, so können wir diese Frage wie folgt angreifen:

1. $|e^{2\pi i \varphi_n}| = 1$, also ist der Konvergenzradius von (2) gleich demjenigen von (1), also — nach Voraussetzung — gleich 1. Auf dem Kreise $|z| = 1$ liegt daher *sicher* mindestens ein singulärer Punkt von (2); die Wahrscheinlichkeit w dafür ist also gleich 1.

Es sei nun q eine natürliche Zahl und B_1 der Bogen $z = e^{2\pi i \vartheta}$ mit $0 \leqq \vartheta < \frac{1}{q}$. Es sei w_1 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (wenigstens) ein singulärer Punkt von (2) auf B_1 liegt und allgemein w_k die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (wenigstens) ein singulärer Punkt auf B_k liegt, wo B_k durch

$$z = e^{2\pi i \vartheta}, \qquad \frac{k-1}{q} \leqq \vartheta < \frac{k}{q}$$

erklärt ist. Es wird behauptet:

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_q. \tag{3}$$

Läßt man nämlich in (2) das Argument von z um $\frac{1}{q}$ wachsen, so kommt das auf dasselbe hinaus, als wenn man z unverändert ließe, dafür aber die Phasenpunkte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ je um $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \ldots$ im positiven Sinne auf dem Kreise verschöbe. Da aber die Wahrscheinlichkeit eines Phasenwahl-Ergebnisses bei einem jeden Koeffizienten nur von dem Maß der Punktmengen, nicht aber von ihrer absoluten Lage auf dem Phasenkreise abhängt, so brauchen wir die Vergrößerung der Phasen nicht zu beachten. Daher ist in unserem Problem B_1 mit B_2 vertauschbar, also $w_1 = w_2$. Ebenso folgt (3).

2. Nach der Regel der totalen Wahrscheinlichkeit ist

$$w \leqq w_1 + w_2 + \ldots + w_q,$$

also nach (3)

$$w \leqq q w_1. \tag{4}$$

Nun war aber $w = 1$, was mit (4) $w_1 > 0$ ergibt.

Dürften wir aus $w_1 > 0$ *auf* $w_1 = 1$ *schließen*, so könnten wir folgendermaßen fortfahren:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ganz B_k regulär ist, heiße v_k; es ist $v_k = 1 - w_k$, also

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_q = 1 - w_1 = 0.$$

Ist $v(q)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens einer von den Bögen $B_1, B_2, \ldots, B_q$ regulär ist, so ergibt die Regel der totalen Wahrscheinlich-

keit, daß

$$v(q) \leqq v_1 + v_2 + \ldots + v_q = 0,$$

also $v(q) = 0$ gilt.

Bezeichnet $\bar{v}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter allen Bögen

$$z = e^{2\pi i \vartheta}, \qquad \frac{m}{p} \leqq \vartheta < \frac{m+1}{p} \qquad (m, p = 0, 1, 2, \ldots; m < p)$$

wenigstens einer regulär ist, so gilt

$$0 \leqq \bar{v} \leqq \sum_{p=1}^{\infty} v(p) = 0, \qquad \bar{v} = 0.$$

Damit ist aber gezeigt worden, daß singuläre Punkte mit der Wahrscheinlichkeit 1 *überall dicht erwartet werden müssen, also den Einheitskreis erfüllen.*

Dieses ist aber der Inhalt des Borelschen Satzes in der Formulierung der Einleitung.

3. Der Schluß von $w_1 > 0$ auf $w_1 = 1$ soll jetzt begründet werden. Dazu müssen wir auf die Definition der Wahrscheinlichkeit, richtiger gesagt, auf die Art deren Berechnung eingehen. Sie beruht darauf, daß man zunächst einer jeden Phasen*punktfolge*, also einer Folge von Punkten des Phasenkreises, *einen Punkt* desselben Kreises als „Bild" zuordnet. Dieses geschieht folgendermaßen: Ist $\{\varphi_n\}$ die Phasenfolge und entwickeln wir jedes φ_n dyadisch-unendlich (wobei die vor dem Komma stehende Ziffer hier ohne Belang ist, also Null gesetzt werden darf):

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = 0, \varphi_{11}\varphi_{12}\varphi_{13}\cdots \\ &\varphi_2 = 0, \varphi_{21}\varphi_{22}\varphi_{23}\cdots \\ &\varphi_3 = 0, \varphi_{31}\varphi_{32}\varphi_{33}\cdots \\ &\quad\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{5}$$

so werde φ durch die dyadische Entwicklung

$$\varphi = 0, \varphi_{11}\varphi_{21}\varphi_{12}\cdots\varphi_{k1}\varphi_{k-1,2}\varphi_{k-2,3}\cdots\varphi_{1k}\cdots \tag{6}$$

definiert. Dem Zentriwinkel φ entspricht ein Punkt des Kreises und dieser Punkt ist das gesuchte „Bild". Diese Zuordnung erlaubt auch, zu einem gegebenen Punkte eine entsprechende Phasenpunktfolge zu finden, deren „Bild" der gegebene Punkt ist; Punkte, für welche dieses unmöglich oder auf mehr als eine Art möglich ist, bilden (auf dem Phasenkreise) eine Menge vom Maße Null.

Ist nun E eine *Menge von Phasenpunktfolgen*, so soll die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unabhängig voneinander aus dem Phasenkreise vom Umfange 1 gewählte Phasenpunkte (d. h. unabhängig voneinander gewählte Zahlen φ_n) eine zu E gehörende Folge ergeben, per definitionem gleich

sein dem Lebesgueschen Maße derjenigen Punktmenge E, die aus den Bildern der E-Folgen besteht. Diese Definition, die auf den ersten Blick höchst willkürlich erscheint, erfüllt alle Forderungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, worüber in § 3 berichtet werden wird.

Ist nun w_1 eine Wahrscheinlichkeit, also gleich dem Maße einer gewissen Punktmenge W_1, und ist W_1 die Menge von Phasenpunktfolgen, deren „Bilder" W_1 ergeben, so besteht W_1, nach der Definition der Zahl w_1 in **1.**, aus allen Phasenpunktfolgen, welche bei (2) Singularitäten auf B_1 veranlassen. Es wird behauptet, daß W_1 durch eine Verschiebung auf dem Phasenkreise um $\frac{1}{2^k}$ (wo k beliebig natürlich) in sich selbst übergeht (abgesehen von einer Nullmenge). Denn ist φ die Phase eines zu W_1 gehörenden Punktes und $\varphi \dotplus \frac{1}{2^k}$ die Phase des verschobenen Punktes, so unterscheiden sich die dyadischen Entwicklungen beider höchstens in den ersten k Stellen nach dem Komma (dieses ist unrichtig für gewisse φ, die aber eine Nullmenge ausmachen). Beide Punkte sind „Bilder" von gewissen Phasenpunktfolgen, die etwa durch die Folgen $\{\varphi_n\}$ bzw. $\{\bar{\varphi}_n\}$ gegeben sein mögen. Nach der Art, wie $\{\varphi_n\}$ und $\{\bar{\varphi}_n\}$ aus ihren „Bildern" gewonnen werden, können sie sich voneinander höchstens in den k ersten Termen unterscheiden (wenn man die Ziffern vor dem Komma und eine gewisse φ-Nullmenge außer acht läßt). Nun war aber φ die Phase eines zu W_1 gehörenden Punktes, d. h. $\{\varphi_n\}$ gab bei (2) zu einer Singularität auf B_1 Anlaß, und es erhellt aus dem soeben Gesagten, daß $\{\bar{\varphi}_n\}$ dasselbe leistet. $\{\bar{\varphi}_n\}$ gehört demnach zu W_1 und ihr „Bild" $\left(\text{von der Phase } \varphi \dotplus \frac{1}{2^k}\right)$ zu W_1. Es hat daher W_1 die behauptete Eigenschaft, durch $\frac{1}{2^k}$-Verschiebungen im wesentlichen[9]) erhalten zu bleiben.

Diese Eigenschaft hat nach bekannten Sätzen[10]) zur Folge, daß das Lebesguesche Maß der Menge W_1 nur 0 oder 1 sein kann, wenn es überhaupt existiert. Da $|W_1| = w_1 > 0$ war, muß $w_1 = 1$ sein, w. z. b. w.

4. Um die *Meßbarkeit* von W_1 zu beweisen, bemerken wir, daß die Regularität eines Konvergenzkreisbogens mit gewissen Ungleichungen äquivalent ist; jede Ungleichung enthält endlichviele Koeffizienten der Reihe (2); deutet man $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ als Koordinaten eines n-dimensionalen kartesischen Raumes, so definiert jede Ungleichung eine n-dimensional-meßbare Mannigfaltigkeit; es gibt abzählbar-unendlichviele Ungleichungen; an den durch sie definierten Mengen werden endlichoft die lim-, lim- $\overline{\lim}$-

[9]) D. h. bis auf eine Nullmenge.

[10]) C. Burstin, Berichtigung der Arbeit „Über eine spezielle Klasse reeller periodischer Funktionen", Monatshefte f. Math. u. Phys. 27 (1916), S. 163–165.

und II-Operationen ausgeführt. Die „Bilder" sind meßbar und bleiben es nach jeder Operation. Diese Andeutungen mögen hier genügen; Näheres darüber findet man in einer gleichzeitig in den „Studia Mathematica" erscheinenden Arbeit des Verfassers[11]).

§ 2.

Fragestellung II.

Es seien $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ gegebene reelle nichtnegative Zahlen; die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{1}$$

sollen aus den Kreisscheiben K_n:

$$|z| \leqq r_n$$

gelost werden. Die Ziehungen geschehen unabhängig voneinander und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß c_n zu einer Teilmenge von K_n gehört, ist dem ebenen Maße der Teilmenge proportional (sie ist gleich 1 für $c_n \in K_n$). Es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, mit welcher man erwarten darf, daß der Konvergenzkreis natürliche Grenze ist.

1. Zunächst werden wir zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Einheitskreis Konvergenzkreis ist, dann und nur dann 1 ist, wenn

$$\limsup_{n \to \infty} r_n^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{7}$$

Denn findet letztere Beziehung statt, so gibt es eine Folge $\{n_i\}$ mit

$$r_{n_i}^{\frac{1}{n_i}} > 1 - \varepsilon; \tag{i}$$

soll nun $\sum c_n z^n$ für $z = \frac{1}{1-\varepsilon}$ konvergent sein, so muß

$$\lim_{i \to \infty} c_{n_i} \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{n_i} = 0,$$

also — für $i > J(\varepsilon)$ —

$$|c_{n_i}(1-\varepsilon)^{-n_i}| < 1 - \varepsilon, \qquad |c_{n_i}| < (1-\varepsilon)^{n_i+1} < r_{n_i}(1-\varepsilon)$$

sein. Die Wahrscheinlichkeit für $|c_{n_i}| < r_{n_i}(1-\varepsilon)$ ist aber gleich $(1-\varepsilon)^2$, die Wahrscheinlichkeit derselben Beziehung für alle $i > J(\varepsilon)$ (nach der

[11]) H. Steinhaus, Sur la probabilité de la convergence de séries. Première communication. Voraussichtlich Stud. Math. 2 (1929/30). Vgl. auch: Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, Fund. Math. 4 (1923), S. 286–310, und W. Sierpiński: Sur une définition axiomatique des ensembles mesurables (L), Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie (1919), séance du 8 juillet 1918, S. 173–178.

Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit) gleich

$$\lim_{k\to\infty}(1-\varepsilon)^{2k}=0.$$

Mithin ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (1) für $z=\frac{1}{1-\varepsilon}$ konvergiert, also auch dafür, daß der Konvergenzradius 1 übertrifft, gleich Null. Nun ist aber der Konvergenzradius von $\sum r_n z^n$ genau gleich 1, also für $\sum c_n z^n$ nicht kleiner als 1, mithin — mit der Wahrscheinlichkeit 1 — gleich 1. Die Bedingung (7) ist aber auch *notwendig*, denn wäre $\limsup \sqrt[n]{r_n}=\varrho$, so würde eine der vorhergehenden analoge Überlegung zur Wahrscheinlichkeit 1 für den Konvergenzradius $\frac{1}{\varrho}$ führen.

2. Um jetzt zu zeigen, daß der Einheitskreis auch natürliche Grenze für (1) mit der Wahrscheinlichkeit 1 ist, brauchen wir keine andere Methode als die des § 1; da Drehungen um den Mittelpunkt Kreisscheiben in sich überführen, bleiben alle Schlüsse gültig, nur muß wieder die Wahrscheinlichkeit dem Problem entsprechend definiert werden. Dieses geschieht in zwei Schritten.

Erstens bildet man die Kreisscheibe K_n auf den Phasenkreis (vom Umfange 1) ab; von dieser Abbildung verlangt man, daß sie nach Ausschluß von Nullmengen eineindeutig sei und daß sie einer jeden Punktmenge, die in K_n enthalten ist und ein ebenes Lebesguesches Maß besitzt, eine „lineare" Teilmenge des Kreises vom Umfang 1 von einem $r_n^2\pi$-mal kleinerem Maße zuordnet. Auf diese Weise entspricht einer $\{c_n\}$-Folge eine Phasenpunktfolge, denn c_n gehört zu K_n und kann auf einen Phasenpunkt abgebildet werden.

Zweitens verfährt man mit der Phasenpunktfolge wie im § 1, **3**, um zu einem einzigen Phasenpunkte zu gelangen.

Diese zweistufige Abbildung ordnet einer jeden Folge $\{c_n\}$ mit komplexen Gliedern $c_n \in K_n$ einen Phasenpunkt des Kreises vom Umfang 1 zu. Entspricht nun einer Folgenmenge M eine linear-meßbare Punktmenge M, so setzen wir die Wahrscheinlichkeit der Zugehörigkeit von $\{c_n\}$ zu M per definitionem gleich dem linearen Maße von M. Es ist wieder von Wichtigkeit, daß der Menge S derjenigen Folgen $\{c_n\}$, die zu Singularitäten auf B_1 führen, ein meßbares S entspricht. Dieses kann ohne weiteres gezeigt werden, wenn man die analoge Frage über W_1 in § 1 erledigt hat, denn die zweistufige Abbildung ist in ihrer ersten Stufe meßbarkeitserhaltend, die zweite Stufe ist aber dieselbe Abbildung wie in § 1.

Wir könnten die Voraussetzungen des Borelschen Satzes noch ein wenig verallgemeinern, indem wir die Wahrscheinlichkeit der Wahl eines c_n

der komplexen Ebene von der Distanz r vom Nullpunkt abhängen ließen. Dies kommt auf die Einführung einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f_n(r)$ hinaus; in dem behandelten Falle ist $f_n(r) = 1$ für $r \leqq r_n$, $f_n(r) = 0$ für $r > r_n$.

§ 3.

Wahrscheinlichkeitspostulate.

Die Wahrscheinlichkeitspostulate für den Fall der Fragestellung I (vgl. § 1).

Die Wahrscheinlichkeit ist eine nichtnegative Funktion $f(M)$; dabei ist M eine Menge von Phasenpunktfolgen oder — was auf dasselbe hinauskommt — von Zahlenfolgen $\{\varphi_n\}$ des Intervalls $\langle 0, 1\rangle$. Es sind aber nicht alle M als Argumente zulässig; die zulässigen bilden eine Klasse $\mathfrak{R}$; diese wird gewonnen als Durchschnitt aller Klassen $\mathfrak{R}^*$, welche (mit irgendeinem $f^* \geqq 0$) folgendes Postulatensystem befriedigen:

1. Sind $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \ldots$ Lebesguesche meßbare Mengen auf dem Phasenkreise und ist N die Gesamtheit aller Folgen von Punkten $\{\pi_n\}$ mit

$$\pi_1 \in \Phi_1,\ \pi_2 \in \Phi_2, \ldots, \pi_n \in \Phi_n,$$

so ist $N \in \mathfrak{R}^*$ und

$$f^*(N) = |\Phi_1| \cdot |\Phi_2| \ldots |\Phi_n|.$$

(Dieses Postulat liefert (für $n = 1$) die Elementarwahrscheinlichkeit, d. h. die Annahme, daß alle Teile des Phasenkreises gleichberechtigt sind. Zugleich drückt es die Unabhängigkeit der einzelnen Phasenwahlen aus).

2. Ist $N_i \in \mathfrak{R}^*$ und $N_i N_k = 0$ für $i \neq k$, so ist $\sum_{i=1}^{\infty} N_i \in \mathfrak{R}^*$ und

$$f^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f^*(N_i).$$

(Dieses ist das Postulat von der Totalwahrscheinlichkeit in der stärkeren, bei der Aufgabe des Spielerruins gebrauchten Formulierung).

3. Ist $N_1 \in \mathfrak{R}^*$, $N_2 \in \mathfrak{R}^*$ und $N_1 \supset N_2$, so ist $(N_1 - N_2) \in \mathfrak{R}^*$. (Dieses Postulat besagt, daß dem „Komplementärereignis" eine Wahrscheinlichkeit zukommt, falls sie dem Ereignis zukommt.)

4. Ist $f^*(M) = 0$ und $N \subset M$, so ist $N \in \mathfrak{R}^*$. (Aus diesem Postulat folgt, daß durch Spezialisierung eines „fast unmöglichen", d. h. die Wahrscheinlichkeit Null habenden Ereignisses ein ebensolches entsteht.)

Wir haben bereits in § 1 eine direkte Definition der „Wahrscheinlichkeitsfunktion" f und des „Wahrscheinlichkeitsbereiches" $\mathfrak{R}$ gegeben; setzt man jenes f und $\mathfrak{R}$ an Stelle von f^* und $\mathfrak{R}^*$ in die Postulate ein, so sieht man sofort, daß **2**, **3** und **4** erfüllt sind. Die Nachprüfung des

Postulats **1** ist eine langwierige, aber elementare Aufgabe, zu deren Durchführung die unter [11]) zitierte Arbeit Anweisungen gibt. Es ist leicht zu zeigen (im Anschluß an die Lebesguesche Maßtheorie), daß nicht nur $\mathfrak{K}$ (was ja bei der Definition als Durchschnitt klar ist), sondern auch f durch die Postulate eindeutig festgelegt wird. Unser $\mathfrak{K}$ in § 1 ist nun ein solches „minimales“ $\mathfrak{K}$ (d. h. Durchschnitt aller $\mathfrak{K}^*$), so daß jede Willkür bei der Wahrscheinlichkeitsdefinition als beseitigt erscheint. Hätten wir in (6) die Ziffern von (5) anders geordnet, so hätte das uns genau auf denselben Wahrscheinlichkeitsbereich und auf dieselbe Wahrscheinlichkeitsfunktion geführt.

Die Wahrscheinlichkeitspostulate für den Fall der Fragestellung II. Hier ist es nötig, das Postulat **1** der Aufgabe gemäß abzuändern: Sind $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ ebene, nach Lebesgue meßbare Mengen, wobei $\Psi_i \subset K_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, und ist M die Gesamtheit aller Folgen $\{c_n\}$ mit

$$c_1 \in \Psi_1,\ c_2 \in \Psi_2,\ \ldots,\ c_n \in \Psi_n,$$

so ist $M \in \mathfrak{K}^*$ und

$$f^*(M) = |\Psi_1| \cdot |\Psi_2| \ldots |\Psi_n| : (r_1 r_2 \ldots r_n)^2 \cdot \pi^n.$$

Wir haben in § 2 eine direkte Definition der Wahrscheinlickkeit gegeben; um zu zeigen, daß sie das neue Postulat **1** erfüllt, werden wir diese Verifikation auf die im Falle der Fragestellung I besprochene zurückführen.

Wir haben zu zeigen, daß die Gesamtheit der Folgen $\{c_n\}$

$$c_1 \in \Psi_1,\ c_2 \in \Psi_2,\ \ldots,\ c_n \in \Psi_n,\ c_{n+1} \in K_{n+1},\ \ldots,\ c_m \in K_m \ldots \qquad (m > n)$$

durch die zweistufige Abbildung von § 2 zu einer linearen Lebesgueschen meßbaren Punktmenge (auf dem Kreise vom Umfange 1) vom Maße $|\Psi_1| \cdot |\Psi_2| \ldots |\Psi_n| : (r_1 r_2 \ldots r_n)^2 \pi^n$ führt. Nun geht $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ durch die Abbildung erster Stufe in $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ über, wo Φ_i $(i = 1 \ldots n)$ lineare Punktmengen vom Maße $|\Psi_i| : r_i^2 \pi$ sind; es bleibt bloß zu zeigen, daß die zweite Stufe der Abbildung der Folgengesamtheit $\{\varphi_n\}$

$$\varphi_1 \in \Phi_1 \ldots \varphi_n \in \Phi_n, \qquad \varphi_{n+1} \in \langle 01 \rangle \ldots$$

eine Punktmenge vom Maße $|\Phi_1| \cdot |\Phi_2| \ldots |\Phi_n|$ zuordnet, dieses ist aber die zum Falle der Fragestellung I gehörende Verifikation.

(Eingegangen am 5. August 1929.)

Die Zeichensprache der elliptischen Funktionen.

Von

E. Study in Bonn.

Während einige Mathematiker nicht umhin können, uns mit einem wahren Hagel von Symbolen zu überschütten, haben andere, und zwar Forscher von höchstem Ansehen, großen Wert darauf gelegt, nach Möglichkeit mit dem in Übereinstimmung zu bleiben, was sie vorgefunden hatten. Wie wir uns zu den Zeichen und zum Überlieferten stellen wollen, sind nun Fragen von größter Bedeutung. Wir alle, die wir Mathematik treiben und wünschen, daß unsere Schriften gelesen werden, haben großes Interesse daran, anderen keinen nutzlosen Energieverbrauch zuzumuten und uns also der Sprachen zu bedienen, die zum Ausdruck wissenschaftlicher Gedanken die geeignetsten sind. Sprachen aber durchlaufen eine Entwickelung, und diese besteht nicht nur in einer Bereicherung, sondern, normalerweise, auch in einer Vereinfachung; bis zu gewissen Grenzen, versteht sich. Man findet jedoch, daß der Sprache der Wissenschaft nicht immer die Aufmerksamkeit zugewendet wird, die sie verdient. Ja es sieht häufig so aus, als hielte man sie für eine gleichgültige Sache, die ganz und gar dem Geschmack des Einzelnen überlassen werden darf. Oder als ob man das immer wiederholte Hineinspielen von Höchstpersönlichem in die Wissenschaft als ein Fatum ansähe, dem gegenüber es kein Entrinnen geben kann. Daneben haben wir freilich auch die extreme Richtung der Logistik, für die die Sprache alles zu sein scheint.

Darüber, daß eine einmal vorhandene Kunstsprache nur aus triftigen und in zweifelhaften Fällen auch aufzuweisenden Gründen geändert werden sollte, braucht wohl kein Wort verloren zu werden. In der Theorie der elliptischen Funktionen ist dieser Grundsatz indessen nicht befolgt worden, und das hat zur Wirkung gehabt, daß wir nun seit langer Zeit unter dem Einfluß einer Geistesrichtung stehen, die von keinerlei Neuerung etwas wissen will — derselben, für die, in anderen Gebieten, ein italienischer

Schriftsteller das Wort *passatismo* geprägt hat. Ich werde, mit aller Achtung vor Leistungen, die ich in anderer Hinsicht aufrichtig bewundere, sagen, was ich von solchen Tendenzen halte.

Wie bei allen Anwendungen der Mathematik auf die physische Welt „das Reelle“ unbedingt die Hauptsache ist, das sogenannte Imaginäre aber, wenn überhaupt, nur methodisch in Betracht kommt, so stand es, bis in die neueste Zeit, auch mit der Geometrie, die für manchen noch jetzt ein primitiver Zweig der Physik ist, wie bei den Griechen. Sollte mit dieser Methodik, in die unter dem Namen des Anschaulichen oder einer Raumvorstellung auch noch ein psychologisches Moment hineinspielt, auch in anderen Gebieten Ernst gemacht werden, so würde zum Beispiel der wichtigsten Eigenschaft der elliptischen Funktionen, ihrer doppelten Periodizität, nur die Bedeutung einer interessanten Verzierung belassen werden. Es tritt aber, wie B. Riemann in seiner Dissertation (1851) bemerkt hat, erst bei Übergang zu komplexen Veränderlichen eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmäßigkeit hervor. Gilt das auch keineswegs allgemein, — man denke etwa an Minkowskis Geometrie der Zahlen, an Mengenlehre und Topologie —, so beruht doch gerade darauf die Bedeutung der gesamten Theorie der analytischen Funktionen, und in der Geometrie die zentrale Stellung des Algebraischen. In der Geometrie freilich konnte sich, trotz des Fundamentalsatzes der Algebra, eine Umstellung nur langsam vollziehen, weil man da, in den Anfängen, unter dem Druck der Schulmathematik stand, in der sich die Geometrie der Alten erhalten hat. Noch sind Lehrbücher der analytischen Geometrie an der Tagesordnung, deren Verfasser den Adepten unserer Wissenschaft das Imaginäre tropfenweise eingeben und sich nicht selten auch noch viel Schlimmeres zuschulden kommen lassen. Diese Auffassung der Geometrie aber hat auch auf andere Gebiete ungünstig eingewirkt.

Weierstraß, der selbst Wesentliches zur Herbeiführung gesunderer Anschauungen beigetragen hat, glaubte gleichwohl auf die Verfassung der Literatur, die er vorfand, weitgehende Rücksicht nehmen zu müssen, und seine Autorität hat dann andere veranlaßt, dasselbe zu tun. Dahin gehört zum Beispiel, daß in seiner Theorie der elliptischen Funktionen von den sechs Wurzelgrößen $\sqrt{e_i - e_k}$ fast immer gerade diese drei

$$\sqrt{e_1 - e_2}, \quad \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \sqrt{e_2 - e_3}$$

in den Formeln erscheinen. Diese werden nämlich dann, wenn die e_i reell und absteigend geordnet sind $(e_1 > e_2 > e_3)$, reell ausfallen. *Der Nutzen dieser Verkehrung ist Null.* Es steht ja nichts im Wege, im Falle der Anwendung auf Reelles nachträglich $\sqrt{e_1 - e_3}$ für $i\sqrt{e_3 - e_1}$ zu schreiben.

In starkem Mißverhältnis zu diesem wirklich imaginären Nutzen stehen Unzuträglichkeiten, mit denen das genannte Verfahren verbunden ist, besonders dann, wenn auch noch vierte Wurzeln aus den Differenzen $e_i - e_k$ hinzukommen. Gesetzmäßigkeiten gruppentheoretischer Art, die bei systematischem Gebrauch der Wurzelgrößen

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3}, \quad \sqrt[4]{e_3 - e_1}, \quad \sqrt[4]{e_1 - e_2},$$

sofort in die Augen fallen, werden verdeckt, die Formeln erhalten einen geradezu gekünstelten Bau und werden unnötig vermehrt, die Übersichtlichkeit des Ganzen wird zerstört. Und ein Gleiches gilt auch schon von den Bezeichnungen der (halben) Perioden bei Weierstraß, dessen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ $(= \omega, \omega + \omega', \omega')$ bereits keine Vertauschungen zulassen. Tannery und Molk haben in ihrem Lehrbuch einiges davon ausgebessert, aber gerade das Mißlichste haben sie gelassen, wie es war.

Noch schädlichere Wirkungen hat die Beibehaltung des Systems der Jacobischen Funktionen $\vartheta_1 v$, $\vartheta_2 v$, $\vartheta_3 v$, $\vartheta_0 v$ gehabt, bei denen schon die Verteilung der Indizes als unnatürlich erscheinen muß. Vollends werden die Funktionen *Sinus amplitudinis* und so weiter, auf deren Entbehrlichkeit schon Halphen hingewiesen hatte, durch ein Verfahren eingeführt, das niemand verständlich finden kann, dem der historische Zusammenhang unbekannt ist. Man sehe sich doch diese Formeln der Schwarzschen Sammlung an:

$$\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \operatorname{sin\,am}\left(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u,\ k\right),$$

$$\frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} = \operatorname{cos\,am}\left(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u,\ k\right),$$

$$\frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} = \Delta\operatorname{am}\left(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u,\ k\right),$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Hier wird also gar das Argument (u) mit einer Modulfunktion $\sqrt{e_1 - e_3}$ multipliziert!! Ein sachlicher Grund dafür ist nicht aufzufinden. Noch schlimmer steht es um die Funktionen, die in derselben Sammlung Θu usw. genannt werden. Sie enthalten eine vollkommen nutzlose Komplikation.

In einem der gewiß besten unter den kleineren Werken über elliptische Funktionen, dem von Appell und Lacour (1897), lesen wir auf Seite VII: La théorie des fonctions elliptiques se complique de la question des notations qui varient d'un Traité à l'autre. *Tout d'abord, nous nous sommes interdit rigoureusement d'employer aucune notation nouvelle.* Zu tadeln sind aber doch nur gedankenlose Neuerungen. Auf Seite 106 heißt es sodann: Les séries et produits à double entrée ..., à l'aide desquels

on peut exprimer toutes les fonctions elliptiques, peuvent être remplacées, *aussi bien dans la notation de M. Weierstrass que dans celle de Jacobi*[1]), par des séries à simple entrée beaucoup plus rapidement convergentes. Dann aber geht es weiter: *Nous allons exposer ici les notations de Jacobi.* Diese also müssen mit Haut und Haaren hinuntergeschluckt werden, nur weil sie einmal da sind, ganz als ob es einen Fortschritt darüber hinaus gar nicht gegeben hätte. Unsere Vorgänger — *auch Jacobi* — haben sich Häuser nach ihren Bedürfnissen erbaut. Warum müssen denn wir in alten Schlössern wohnen?

Wie die Erfolge des Infinitesimalkalküls, die Determinantentheorie usw. es beweisen, sind Zeichen mit nichten eine so gleichgültige Sache, wie die es wohl meinen müssen, die die ihrigen beinahe aufs Gerathewohl hinwerfen[2]). *Es ist nicht einmal immer gleichgültig, ob man eine Veränderliche x oder $-x$ nennen will.* Die Geschichte der elliptischen Funktionen enthält ein lehrreiches Beispiel der Art. Die von Weierstraß (1862) gefundenen dreigliedrigen Additionstheoreme waren nämlich dem Scharfblick Jacobis entgangen, und zwar aus dem einzigen Grunde, weil er in den Formeln für die Argumente ein unzweckmäßiges Vorzeichen benutzt hatte. Fast dreißig Jahre mußten vergehen, ehe dieser kleine, aber für die ganze Theorie bedeutungsvolle Schritt getan werden konnte!

Es ergibt sich also die Lehre, daß auf die Wahl der Zeichen selbst in scheinbaren Kleinigkeiten sorgfältig zu achten ist.

Die in Betracht kommenden Transformationen von Argumentquadrupeln haben bei Jacobi die Periode zwei, sie sind „involutorisch". Bei Weierstraß haben sie die Periode drei. In der Theorie der Abelschen Funktionen aber stehen bis auf den heutigen Tag ausschließlich involutorische Transformationen im Mittelpunkt (*Riemannsche Thetaformel*). Es ist also nicht ausgemacht und nicht einmal wahrscheinlich, daß man in dieser schwierigeren Theorie zu dem Kern der Sache vorgedrungen ist.

Zeichen, auf die wir zuerst verfallen, sind manchmal nicht die besten — gilt dasselbe doch auch schon von den Begriffsumgrenzungen, die von den Zeichen vertreten werden. Viele schlechte Zeichen haben wir wahrscheinlich nur darum in der Mathematik, weil es unbequem ist und auch zu einer Fehlerquelle werden kann, einmal Geschriebenes durchgehends zu ändern. Wie man auch im konkreten Falle urteilen möge — jedenfalls ist die Zeichensprache so einfach wie möglich zu halten.

---

[1]) Andere haben, ich weiß nicht warum, das Gegenteil behauptet.

[2]) Freilich kommt auch das entgegengesetzte Extrem vor. D. Hilbert: Im Anfang war das Zeichen. Diese Geburt des Zeichens aus dem Nichts ist doch wohl nicht ernst zu nehmen. Viel häufiger ist jedenfalls die Geburt eines Nichts aus dem Zeichen.

Weierstraß hat, wie sich deutlich erkennen läßt, in der Theorie der elliptischen Funktionen gelegentlich von homogenen Veränderlichen Gebrauch gemacht. In seinen Vorlesungen erscheinen sie aber nicht, und auch das hat der Sache nicht zum Vorteil gereicht. Gewiß hat er seinen Zeichen große Aufmerksamkeit geschenkt. Aber historische Rücksichten wurden, zum Glück nicht überall, den sachlichen vorangesetzt. Es macht doch einen befremdenden Eindruck, wenn man bei späteren Autoren Kapitelüberschriften wie diese zu lesen bekommt: Étude speciale *des notations* de Jacobi. Handelte es sich nicht gerade um Mathematik, so würde ein jeder sich wundern, in einer bestimmten Literaturgattung ein Werk nach dem anderen streckenweise in verschiedenen Idiomen abgefaßt zu finden, mit eingeschalteten kleinen Wörterbüchern. Was würde die Kritik dazu sagen? Ja was hat denn unsere Kritik dazu gesagt?[3])

Ich komme noch einmal auf das Reelle zurück. Außer dem schon besprochenen Falle gibt es noch zwei andere, die zum Reellen eine Sonderstellung haben und die nun unter der Auszeichnung des ersten leiden müssen. Eine Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten hat ja vier oder zwei reelle Wurzeln oder keine. Diese drei Fälle sollten als gleichberechtigt behandelt werden, nicht so wie z. B. bei Burkhardt, dessen vielbenutztes Lehrbuch, neben manchem Guten, auch Ungeschicktes und Häßliches enthält, infolge des Historismus seines gelehrten Verfassers, der für einen harmonischen Aufbau der Theorie nur wenig Sinn hatte und die „Eleganz" nur gar zu oft den Schustern und Schneidern überlassen hat.

Unschädliche Kleinigkeiten mögen immerhin bleiben. Von der Periodenbezeichnung 2ω, $2\omega'$ oder $2\omega_1$, $2\omega_3$ zu einer anderen überzugehen, verursacht keine Mühe. Im übrigen aber dürfte es höchste Zeit sein, die in Rede stehende Theorie einem Verjüngungsprozeß zu unterwerfen. Je länger man damit wartet, desto schwerer mag es dem Einzelnen scheinen, nicht mit den Wölfen zu heulen, und desto mühevoller wird die Sache, da immer wieder Neues und auch Wertvolles hinzukommt, das gleichwohl nichts Fertiges ist. Die Verfasser von Lehrbüchern haben eine gerade ihnen zufallende *wissenschaftliche* Aufgabe: Aus dem historisch Zusammengewürfelten, in der Form nicht Zusammenstimmenden und Zufälligen etwas zu machen, das aus einem Guß ist und den Namen eines Kunstwerks verdient. Schlecht genug aber ist man gar oft dieser doch wohl vernünftigen Forderung gerecht geworden.

[3]) Auch P. Staeckel, dessen Referate (z. B. über das Buch von Tannery und Molk, in den Fortschritten der Mathematik) sich weit über den Durchschnitt derartiger Leistungen erheben, hat gegen dieses Verfahren nichts einzuwenden gehabt.

Gegen das Vorgetragene könnte der Einwand versucht werden, es komme doch auch darauf an, werdenden Forschern die Literatur zugänglich zu machen — *die Literatur, wie sie nun einmal ist.*

Ganz gewiß gehört das zu den Aufgaben eines Lehrbuches mit wissenschaftlichen Ansprüchen! Es gehört dazu, wiewohl von hundert Lesern eines solchen Werkes schwerlich auch nur zwei sich um weiteres bemühen werden[4]). Nicht benutzte Zeichen können aber auch außerhalb des Lehrganges erklärt werden, so wie es Tannery und Molk mehrfach getan haben. Und in solchen Anhängen oder Anmerkungen ist auch noch für manches andere Platz, namentlich für Verweisungen auf nicht verwertete Literatur, für kurze Inhaltsangaben, wie in Krazers Lehrbuch der Thetafunktionen, und unter Umständen auch für Kritik. Dagegen sind Anhäufungen bloßer Titel wissenschaftlicher Arbeiten, die man häufig genug findet und die sogar als verdienstlich betrachtet werden, völlig wertlos. Derartiges wird niemanden aus seiner Bequemlichkeit aufrütteln — viel eher kann es abschreckend wirken — und auch die Autoren werden mit dieser Art von „Berücksichtigung" ihrer Schriften nie zufrieden sein.

In allem Menschenwerk spuken Zufall und Willkür. Es kommt allerdings auch vor, daß zwischen an sich gleichberechtigten Möglichkeiten eine Wahl getroffen werden muß. So, in den elliptischen Funktionen, bei Entscheidung für eine der Annahmen $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$ und $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) < 0$. Hiervon abgesehen aber wird das Zufällige und *Nur*-Historische nach Möglichkeit einzuschränken sein. Andernfalls entsteht die Gefahr, daß so etwas wie ein babylonischer Turm zustande kommt. Tatsächlich haben wir solche Wunderbauten nebst zugehöriger Sprachverwirrung schon mehr als genug. *Sachgemäß (objektiv) ist immer nur, was ein Mindestmaß von Willkür enthält.* Nur dieses empfinden wir in der Mathematik als *reizvoll* oder *schön.* Die Überwindung von Schwierigkeiten ist etwas anderes. Es ist zu unterscheiden zwischen Pionierarbeit, von der kein Verständiger gleich alles verlangen wird, und einem fortgeschritteneren Zustand der Wissenschaft.

Wichtig, insofern vieles davon abhängt, und zugleich auch schön, sind die Begriffsbestimmungen und Eigenschaften der Funktionen σu, ζu, $\wp u$, $\wp' u$ und nicht minder die der Funktionen $\sigma_\lambda u$ und $\sqrt{\wp u - e_\lambda}$, wenn auch diese letzten weniger umfassenden Absichten dienen. In ihnen allen hat Weierstraß ein wissenschaftliches Ideal verkörpert. Soweit, darüber hinaus aber nicht, scheint in seiner Theorie Endgültiges geleistet zu sein. Jedenfalls besitzen wir nicht vieles von solcher Vollkommenheit.

---

[4]) Vermutlich aus diesem Grunde haben einzelne Verfasser, z. B. Burkhardt, auf alle Literaturangaben verzichtet; was mit Recht getadelt worden ist.

Dieses ist auch die Ansicht von F. Klein gewesen, der in seiner besten Zeit, unter Mitwirkung einiger seiner Schüler, einen Anfang damit gemacht hat, in der Theorie der Abelschen, zunächst der hyperelliptischen Funktionen, Ähnliches zu leisten. Es ist sehr zu bedauern, daß infolge unglücklicher persönlicher Umstände diese Forschungen in den Anfängen stecken geblieben sind. Die Theorie der Abelschen Funktionen teilt jetzt mit der Theorie der Invarianten das Schicksal, unmodern zu sein. Wie viele unserer jüngeren Generation wissen etwas davon? Ist das, was jetzt an der Mode ist, wohl wertvoller?

Natürlich muß, wer auf irgendeinem Gebiet einen wirklichen Fortschritt zu erreichen hofft, auf das verzichten können, was augenblicklichen Erfolg verspricht. Er wird nicht einfach da weiterbauen dürfen, wo andere, seien es auch Jacobi oder Weierstraß, zu bauen aufgehört haben, sondern er wird hier oder dort von vorn anfangen müssen.

Am deutlichsten tritt der Gegensatz zwischen dem, was die Sache fordert und dem Historismus oder Passatismus hervor in der Beziehung der elliptischen Funktionen zu Algebraischem und bei den Additionstheoremen der Sigma- oder Thetafunktionen. Beide Gegenstände werden in Lehrbüchern, und vorher schon in den Vorlesungen von Weierstraß und in der Schwarzschen Formelsammlung, auf eine recht unvollkommene Art, die Additionstheoreme überhaupt nur bruchstückweise[5]) abgehandelt, wiewohl die geometrischen Anwendungen — für die sich freilich heutzutage beinahe niemand interessiert — gebieterisch etwas anderes verlangen. Es ist nicht nur die einzelne Formel, auf die es ankommt, sondern die — auch an sich schon sehr merkwürdige — Struktur des ganzen Systems.

Dieses im einzelnen darzulegen würde die Vorführung eines umfänglichen Formelwerkes erfordern. In bezug auf den ersten Punkt sei auf einen kürzlich erschienenen Aufsatz verwiesen[6]). Die Additionstheoreme mit einigen ihrer Folgerungen sollen in einem Buche über sphärische Trigonometrie abgehandelt werden, das sich in Vorbereitung befindet[7]).

[5]) Eine Ausnahme bildet das Lehrbuch von R. Fricke.

[6]) Irrationale Kovarianten und elliptische Funktionen, Monatshefte für Mathematik und Physik **35** (1928).

[7]) Einstweilen sei auf einen Aufsatz im American Journal of Mathematics **16** (1894) verwiesen.

(Eingegangen am 22. Juni 1929.)

Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Von

A. Weinstein in Breslau.

Helmholtz hat im Jahre 1868 zum ersten Male die Gestalt eines freien Flüssigkeitsstrahles in einem speziellen Falle theoretisch bestimmt. Seit dem Erscheinen seiner Arbeit[1]) bildet die Theorie der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegungen, insbesondere die Theorie des freien Strahles, ein wichtiges Kapitel der zweidimensionalen Hydrodynamik und der Theorie der konformen Abbildung.

Zahlreiche weitere Beispiele sind im Laufe der Jahrzehnte im Anschluß hieran entstanden. Einen prinzipiell wichtigen Fortschritt hat jedoch erst Levi-Civita im Jahre 1907 erreicht[2]). Seine Methode liefert für ein Problem aus der Theorie der diskontinuierlichen Strömungen, z. B. für den freien Strahl [in welchem Fall sie von Cisotti angewandt worden ist[3])], eine Lösung, die eine willkürliche analytische Funktion ω enthält und die deswegen als allgemeines Integral des Problems bezeichnet wird. Man erhält die Koordinaten des Stromgebietes durch Einsetzen von ω in ein für allemal aufgestellte Formeln.

Levi-Civita hat zugleich in seiner Arbeit auf das nun entstandene fundamentale mathematische Problem der Bestimmung einer Strömung bei vorgeschriebenen festen Grenzen, in unserm Falle auf das Problem des Ausflusses eines freien Strahles aus einer vorgegebenen Düse, hingewiesen, d. h. auf die Frage, ob man die willkürliche Funktion ω in der allgemeinen

[1]) Helmholtz, Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, Monatsberichte der Berliner Akademie 1868, S. 215.

[2]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **23** (1907), p. 1—37.

[3]) Cisotti, Vene fluenti, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **25** (1908), p. 145—179.

Lösung bei einer vorgeschriebenen Düse (mindestens auf eine Weise) bestimmen kann. Zieht man eine Parallele zwischen den Formeln von Levi-Civita und Cisotti in der Theorie des freien Strahles mit denjenigen von Weierstraß in der Theorie der Minimalflächen, welche ja auch eine willkürliche analytische Funktion enthalten, so ist unser Existenzproblem in Analogie zum Plateauschen Problem zu setzen. Es ist zu bemerken, daß die Fragestellung im Gegensatz zu vielen anderen Strömungsaufgaben prinzipiell nicht auf den Riemannschen Abbildungssatz zurückzuführen ist.

In der vorliegenden Note wird der Existenzbeweis für mindestens einen Strahl mit vorgeschriebener symmetrischer Düse geführt. Die Begrenzung der Düse soll aus zwei symmetrischen, bis auf endlich viele Eckpunkte stetig gekrümmte Kurven ω_1, ω_2 bestehen (Fig. 1), die aus dem Unendlichen ($x = -\infty$) kommen, zur Strömung durchweg konkav sind und im Unendlichen zwei parallele Asymptoten besitzen. Es wird vorausgesetzt, daß die Totalkrümmung jeder dieser Kurven, d. h. der Winkel zwischen der Tangente an der Austrittstelle und der Tangente im Unendlichen, unter einem gewissen Werte bleibt. Diese Schranke ergibt sich nach dem jetzigen Stand der Frage gleich 90^0.

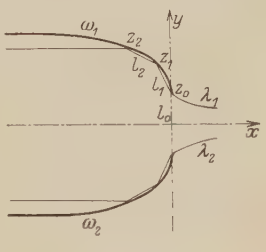

Fig. 1.

Den Beweis des eben formulierten Existenzsatzes habe ich zunächst für eine gewisse Klasse von polygonal begrenzten symmetrischen Düsen unter Verwendung der Kontinuitätsmethode erbracht[4]). Es hat sich dabei gezeigt, daß eine Strömung mit einer vorgegebenen Düse dieser Klasse durch eine Formel von Cisotti dargestellt werden kann [vgl. Formel (4)]. Solche Strömungen sollen im folgenden als *Cisottische Strömungen* bezeichnet werden. Durch einen Grenzübergang werden wir den entsprechenden Existenzsatz für Strömungen mit vorgeschriebener krummliniger Begrenzung erhalten. Zunächst aber soll im folgenden eine kurze zusammenfassende Darstellung des Beweisganges für den Fall polygonaler Düsen gegeben werden, was bis jetzt noch nicht geschehen war.

Die Hauptschwierigkeit der Anwendung der Kontinuitätsmethode besteht in diesem Falle in dem Beweis des folgenden Unitätssatzes I:

Es gibt keine zwei verschiedenen unendlich benachbarten Strahlen, die aus derselben Düse austreten und dieselbe asymptotische Geschwindigkeit besitzen.

[4]) A. Weinstein, Sur les jets liquides à parois donnés, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei Bd. IV, Serie 6ª (1926), S. 119. – A. Weinstein, Sur le théorème d'existence des jets liquides, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei Bd. V, Serie 6ª (1927), S. 157.

Ich habe den Beweis dieses Satzes auf den Beweis eines mathematisch leichter zu behandelnden Unitätssatzes II zurückgeführt, der aus I entsteht durch das Hinzufügen der Voraussetzung, daß die beiden benachbarten Strahlen denselben Kontraktionskoeffizienten haben sollen. Diese letztere Voraussetzung gibt dem Unitätssatze II [den ich zunächst gesondert vom Existenzproblem formuliert und für eine gewisse Klasse von Kanälen bewiesen habe[5])] einen durchaus künstlichen Charakter. Der Satz II und eine Erweiterung seiner Gültigkeitsgrenzen wird aber vor allem deswegen von Interesse, weil man daraus, wegen des nachgewiesenen Zusammenhanges mit I, unmittelbar eine entsprechende Erweiterung des Gültigkeitsbereiches unseres Existenzproblems erhält. Herr Hamel hatte bereits, bevor dieser Zusammenhang bekannt war, die Gültigkeitsgrenzen des Satzes II wesentlich erweitert, indem er ihn für symmetrische polygonale Düsen von einer Totalkrümmung $\leqq$ ca. 50^0 bewies[6]). Sodann hat Herr Weyl diese Schranke für II (und also nach meinen Resultaten automatisch auch diejenige von I) durch 90^0 ersetzt[7]).

§ 1.

Polygonale Begrenzung.

Die Cisottischen Formeln und der Kontinuitätsbeweis.

Es sei $z = x + iy$ die Stromebene. Wir setzen voraus, daß die Strömung symmetrisch zur x-Achse ist. Der nach dem Energiesatz konstante Betrag der Geschwindigkeit auf den freien Grenzen λ_1 und λ_2 des Strahles soll gleich 1 gesetzt werden. Zugleich ist das der asymptotische Wert der Geschwindigkeit im Unendlichen stromabwärts. Es seien φ und ψ das Geschwindigkeitspotential bzw. die Stromfunktion. Das komplexe Potential $f = \varphi + i\psi$ bildet

---

[5]) A. Weinstein, Ein hydrodynamischer Unitätssatz, Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 265.

[6]) G. Hamel, Ein hydrodynamischer Unitätssatz, Verhandlungen des Zweiten Internationalen Kongresses für technische Mechanik, Zürich 1926 (Verlag Orell Füssli, Zürich 1927).

[7]) H. Weyl, Strahlbildung, nach der Kontinuitätsmethode behandelt, Göttinger Nachrichten 1927, S. 227. Zur Formulierung des Satzes II sei folgendes bemerkt: Ich habe mich auf die Betrachtung symmetrischer Strömungen beschränkt, weil aus der Symmetrie die Gleichheit der Abflußrichtungen beider benachbarten Strahlen folgt, ein Umstand, der für den Beweis von II von Wichtigkeit ist. Man kann aber auch, wie es Herr Weyl tut, die Voraussetzung über die Symmetrie fallen lassen, dafür sich aber auf die Betrachtung benachbarter Strahlen von gleicher Abflußrichtung beschränken. Da aber die Zurückführung von I auf II, auf die auch der Weylsche Beweis von I hinausläuft, vorläufig nach wie vor nur für symmetrische Strömungen besteht, wird im Haupttext nur von den letzteren die Rede sein. Übrigens ist für Herrn Weyl das Problem II ein solches vom selbständigen Interesse.

die Strömung auf den Parallelstreifen $-\frac{\mu\pi}{2} \leqq \psi \leqq +\frac{\mu\pi}{2}$, wobei $\mu\pi$ gleich der Breite des Strahles im Unendlichen stromabwärts ist. Die freien bzw. festen Grenzen der Strömung gehen bei dieser Abbildung in die Halbgeraden $\varphi > 0$, $\psi = \pm\frac{\mu\pi}{2}$ bzw. $\varphi < 0$, $\psi = \pm\frac{\mu\pi}{2}$ über. Wir setzen $w = \frac{df}{dz} = u - iv = e^{-i\omega}$, $\omega = \vartheta + i\tau$, so daß w das Konjugierte der komplexen Geschwindigkeit, ϑ den Winkel des Vektors Geschwindigkeit mit der x-Achse und τ den Logarithmus ihres Betrages bedeutet. Nach Cisotti führen wir statt f die Variable $\zeta = \xi + i\eta = \varrho e^{i\sigma}$ ein, indem wir setzen

$$e^{\frac{f}{\mu}} = \frac{i}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \qquad df = \mu\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{1}$$

d. h. indem wir die Strömung konform auf die obere Hälfte des Einheitskreises der ζ-Ebene abbilden. Dabei gehen die festen Grenzen ω_1 und ω_2 in die Peripherie, die freien Linien λ_1 und λ_2 in den Basisdurchmesser des Halbkreises über. Die η-Achse ist das Bild der Symmetrieachse $y = 0$ bzw. $\psi = 0$.

Das allgemeine Integral des Problems des freien Strahles erhalten wir, indem wir in der Beziehung $dz = \frac{df}{w} = e^{i\omega}df$ das Differential df durch $\mu\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\frac{d\zeta}{\zeta}$ und ω durch eine willkürliche im Kreise $|\zeta| < 1$ reguläre Funktion ersetzen, welche für reelle ζ reell ist und für $\zeta = 0$ verschwindet. Durch eine Quadratur erhält man die Cisottische Parameterdarstellung der Strömung:

$$z = \mu\int_1^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\frac{d\zeta}{\zeta} + z_0 = \mu\int_1^{\zeta}\frac{1}{w(\zeta)}\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1}\frac{d\zeta}{\zeta} + z_0. \tag{2}$$

Die Konstante $|z_0|$ bedeutet dabei die halbe Öffnung der Düse[8]).

---

[8]) Setzt man, nach dem Vorschlag von Villat [Annales de l'École Normale supérieure **28** (1911), S. 284], in der Formel (2)

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\sigma)\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2}d\sigma$$

(Poisson-Schwarzsches Integral), wobei die (willkürliche) Funktion $\vartheta(\sigma)$ den Bedingungen $\int_0^{\pi}\vartheta(\sigma)d\sigma = 0$, $\vartheta(\pi-\sigma) = -\vartheta(\sigma)$ genügt, so kann man durch geschickte Wahl von ϑ den Ausfluß eines Strahles aus einer Düse erhalten, deren Gestalt bis zu einem gewissen Grade *qualitativ* vorgeschrieben werden darf. Zur Durchführung eines Existenzbeweises bietet dieser naheliegende Ansatz jedoch keine weiteren Vorteile.

Setzt man insbesondere

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^{2n} (\vartheta_{k+1} - \vartheta_k) \log i \frac{\zeta - \zeta_k}{1 - \zeta \zeta_k}; \qquad \vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_n < 0;$$

$$\vartheta_{2n+2-k} = -\vartheta_k \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n; \tag{3}$$

$$0 < \frac{\vartheta_{k+1} - \vartheta_k}{\mu} = \beta_k < 1; \qquad \zeta_k = e^{i\sigma_k} = \xi_k + i\eta_k,$$

$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n < \frac{\pi}{2}$ und $\sigma_{2n-k+1} = \pi - \sigma_k$ für $k = 1, 2, \ldots, n$),

so erhält man nach Cisotti die Formel

$$z - z_0 = \mu e^{i\vartheta_1} \int_1^{\zeta} \prod_{k=1}^{2n} \left(\frac{1 - \zeta\zeta_k}{\zeta - \zeta_k} \right)^{\beta_k} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{4}$$

die den Ausfluß eines Strahles aus einer polygonal begrenzten symmetrischon Düse liefert (*Cisottische Strömung*). Die positiv gerechneten Außenwinkel der Kanalwände sind gleich $\beta_1\pi$, $\beta_2\pi$, ..., $\beta_n\pi$, während die Seitenlängen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ und die Öffnung l_0 $(= 2|z_0|)$ komplizierte Funktionen der Parameter sind[9]). Wir wollen nun den Beweisgang nach der Kontinuitätsmethode angeben, die uns erlaubt (unter der erwähnten Voraussetzung über die Totalkrümmung des Kanals) den Nachweis zu erbringen, daß man durch passende Wahl der $n+1$ Parameter $\mu, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ den $n+1$ Größen $l_0, l_1, \ldots, l_n$ beliebige vorgeschriebene Werte erteilen kann.

Als erster Schritt des Kontinuitätsbeweises wird gezeigt, daß man, ausgehend von irgendeiner durch die Cisottische Formel (4) gegebene Strömung, den Parametern μ und σ_k solche unendlich kleine Variationen $\delta\mu, \delta\sigma_k$ erteilen kann, daß die Data l_k dabei vorgeschriebene Variationen δl_k zufolge der Gleichungen

$$\delta l_k = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial l_k}{\partial \sigma_h} \delta\sigma_h + \frac{\partial l_k}{\partial \mu} \delta\mu \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{5}$$

erfahren. Die Auflösbarkeit dieser Gleichungen für beliebige Werte der δl_k ist äquivalent mit der Behauptung, daß aus dem Verschwinden aller δl_k notwendig das Verschwinden sämtlicher Variationen $\delta\mu, \delta\sigma_1, \ldots, \delta\sigma_n$ folgt.

---

[9]) In einer $\omega = \vartheta + i\tau$-Ebene wird in diesem Falle das Bild des Stromgebietes durch achsenparallele Strecken $\vartheta = \text{konst.}$, $\tau = \text{konst.}$ begrenzt. Die Abbildung des Streifens in der f-Ebene auf die ω-Ebene wird durch die Schwarz-Christoffelschen Formeln vermittelt. Eine Quadratur liefert hiernach den Zusammenhang zwischen z und f (Kirchhoffsche Methode). Bei diesem Verfahren lassen sich die Längen der Strecken in der ω-Ebene vorschreiben, nicht aber die uns interessierenden Längen l_k der Seiten und der Öffnung der Düse in der Stromebene.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir die harmonische Funktion $\beta = \delta\psi - \psi \frac{\delta\mu}{\mu}$, wo $\delta\psi$ die Variation bedeutet, welche die Stromfunktion ψ an einer *festen Stelle* z durch das Variieren der Parameter μ und σ_k um $\delta\mu, \delta\sigma_k$ erfährt (β ist die konjugierte Funktion zu $\alpha = \delta\varphi - \varphi\frac{\delta\mu}{\mu}$, wobei $\delta\varphi$ die entsprechende Variation von φ bedeutet). Wir interessieren uns für solche Variationen $\delta\mu, \delta\sigma_1, \ldots, \delta\sigma_n$, für welche die zugehörigen Variationen δl_k alle gleich Null sind. In diesem Falle genügt die Funktion β am Rande des Parallelstreifens den folgenden Bedingungen [vgl. loc. cit. [4])]:

$$\beta = 0 \tag{6}$$

auf der festen Grenze $\varphi < 0$, $\psi = -\frac{\mu\pi}{2}$ und auf der Symmetrieachse $\psi = 0$,

$$\frac{d\beta}{dn} - c\beta = -\frac{\delta\mu}{\mu} \tag{7}$$

auf der freien Grenze $\varphi > 0$, $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$.

Dabei bedeutet n die äußere Normale und

$$c = \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} = \frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{\xi(1+\xi^2)}{1-\xi^2}\sum_1^{2n}\beta_k\frac{\sin\sigma_k}{1-2\xi\cos\sigma_k+\xi^2}\ (\geqq 0) \qquad (0 \leqq \xi \leqq 1)$$

die (stets positive) Krümmung der freien Grenze der gegebenen Strömung.

Es ist zu bemerken, daß die Bedingung (6) eine Folge des Verschwindens der δl_k ist; die Gleichung (7) besteht dagegen bei jeder Variation der Parameter μ und σ_k. Das Verschwinden der δl_k erlaubt zunächst keine Aussage über die in den Randbedingungen (6), (7) auftretende Variation $\delta\mu$ zu machen. $\delta\mu$ bleibt vorläufig eine unbekannte Konstante. Unser Ziel ist der Nachweis, daß die durch Variation der Parameter $\delta\mu$ und $\delta\sigma_k$ hervorgerufene Variation $\delta\psi$ der Stromfunktion ψ zufolge den Bedingungen (6), (7) verschwinden muß (Unitätssatz I).

Verlangt man außer dem Verschwinden der δl_k noch das Verschwinden der Variation $\delta\mu$ (d. h. verlangt man bei einem unvariiert bleibenden Düsenprofil noch das Verschwinden der Variation des Kontraktionskoeffizienten), so erhält man für die Funktion β, die wir jetzt mit β_0 bezeichnen wollen und die übrigens in diesem Falle gleich $\delta\psi$ ist, an Stelle von (6) und (7) die Randbedingungen

$$\beta_0 = 0, \tag{6_0}$$

$$\frac{d\beta_0}{dn} = c\beta_0. \tag{7_0}$$

Die Arbeiten loc. cit. [5]) [6]) [7]) erlauben daraus, unter der in der Einleitung erwähnten Voraussetzung über die Totalkrümmung der polygonalen Düse,

auf das Verschwinden von β_0 zu schließen[10]) (Unitätssatz II). Der Beweis des uns vor allem interessierenden Unitätssatzes I wird, wie ich gezeigt habe, auf den Beweis des Satzes II zurückgeführt, indem man zeigt, daß die in (7) auftretende unbekannte Konstante $\delta\mu$ in den Gültigkeitsgrenzen von II gleich Null sein muß. Sonst würde es nämlich eine den Kanalprofil festlassende Variation der μ und σ_k geben, bei welcher die (mit der Richtung der Seite l_1 $(= z_1 \vec{z_0})$ übereinstimmende) Richtung des Vektors Geschwindigkeit an der Austrittsstelle z_0 eine Änderung erfährt. Der Winkel ϑ_1, den dieser Vektor mit der x-Achse bildet, würde bei einer solchen Variation einen Zuwachs erhalten, dessen Vorzeichen mit demjenigen von $\delta\mu$ übereinstimmt. Das würde aber der aus der Cisottischen Formel (4) leicht herzuleitenden Tatsache widersprechen, daß bei einer die Kanalöffnung l_0 festlassenden Variation der Parameter, die Geschwindigkeit im Punkte z_0 erhalten bleibt[11]).

Aus dem Unitätssatz I, d. h. aus dem Verschwinden der Funktion β (die übrigens wegen des nachgewiesenen Verschwindens von $\delta\mu$ mit $\delta\psi$ identisch ist) folgt auf elementarem Wege das Verschwinden der übrigen Variationen $\delta\sigma_1, \delta\sigma_2, \ldots, \delta\sigma_n$[12]), womit die Behauptung über die Auflösbarkeit der Gleichungen (5) bewiesen ist.

Diese Tatsache, die mit dem Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(l_0, l_1, \ldots, l_n)}{\partial(\mu, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)}$ äquivalent ist, erlaubt uns, ausgehend von

[10]) Zur Orientierung des Lesers sei bemerkt, daß in der Weylschen Arbeit loc. cit.[7]) die Randbedingungen für β in der ζ-Ebene formuliert sind. Zugleich vertauscht Herr Weyl dort die Rolle des Basisdurchmessers und der Peripherie der oberen Hälfte des Einheitskreises, indem er die freien bzw. festen Grenzen der Strömung auf die Peripherie bzw. auf den Durchmesser abbildet. Diese Abänderung, die eine entsprechende Abänderung sämtlicher Formeln des Problems erforderlich macht, erlaubt das Spiegelungsprinzip anzuwenden, was für die Weylsche Beweisführung von Bedeutung ist.

[11]) Allgemein ist die Variation $\delta\vartheta$ des Winkels ϑ an irgendeiner Stelle des freien Randes durch die Formel

$$\delta\vartheta = -\left(\frac{d\beta}{d\varphi} + c\,\alpha\right)$$

gegeben. Diese Formel ist der Imaginärteil meiner Formel (7) loc. cit.[4]); ich habe dort gezeigt, daß die rechte Seite bei der Annäherung an die Austrittsstelle dasselbe Vorzeichen wie $\delta\mu$ hat und über alle Grenzen wächst. (Für diese Überlegung ist die Tatsache, daß $c \gtrless 0$ ist, die den Beweis von II erschwert, von wesentlicher Bedeutung.)

Diese Interpretation meiner Überlegungen gilt auch für den einfachsten Fall einer aus zwei parallelen Halbgeraden gebildeten Düse. Eine weitere anschauliche Deutung meines Resultates, bei der aber dieser Fall ausgeschlossen bleibt, hat Herr Weyl loc. cit.[4]) gegeben.

[12]) Vgl. die Formel (8) loc. cit.[4]).

irgendeiner Cisottischen Strömung den Parametern μ und σ_k solche Werte in der Umgebung der Anfangswerte zu erteilen, daß dadurch die Seitenlängen und die Öffnung der Düse vorgeschriebene (endliche aber) hinreichend kleine Änderungen erfahren (Umgebungssatz). Um nun zu zeigen, daß der Prozeß der kontinuierlichen Überführung der l_k in die willkürlich vorgeschriebenen Werte sogar bis zum Schluß durch eine entsprechende Abänderung der Parameter μ und σ_k verfolgt werden kann, hat man den sogen. Schränkungssatz zu beweisen. Dieser Satz besagt folgendes: Aus der Tatsache, daß die l_k bei der Überführung in die vorgeschriebenen Werte zwischen festen positiven Grenzen bleiben, folgt die Existenz einer positiven unteren Schranke für die Beträge der Differenzen $|\sigma_k - \sigma_{k-1}|$, sowie für $\frac{\pi}{2} - \sigma_n$ und für $|\sigma_1|$ und die Existenz endlicher positiver Grenzen für die Werte, welche μ annehmen kann. Die Richtigkeit des Schränkungssatzes folgt aus dem expliziten Ausdruck für die Seitenlängen l_k:

$$(8) \qquad l_k = \mu \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \prod_{h=1}^{2n} \left| \frac{\sin\sigma_h + \sin\sigma}{\sin\sigma_h - \sin\sigma} \right|^{\beta_h} \operatorname{tg}\sigma \, d\sigma \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma_0 = 0),$$

der leicht aus (4) hergeleitet werden kann. Man übersieht nämlich ohne weiteres, daß bei einem Zusammenrücken von zweien oder mehreren Parametern σ_k mindestens eine der Seiten der Düse nach Null oder nach ∞ konvergieren würde [13]).

Wir können also, wenn die l_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ gegen die vorgeschriebenen Werte konvergieren, eine konvergente Folge für jeden der Parameter $\mu, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ absondern, wobei der Limes von μ positiv ist und die Grenzwerte der σ_k alle voneinander verschieden sind und zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen. Diese Limeswerte liefern uns, in die Formel (4) eingesetzt, eine Cisottische Strömung, welche (wegen der stetigen Abhängigkeit der Daten von den Parametern) genau die vorgeschriebene Düse besitzt. Damit ist also der Kontinuitätsbeweis unseres Existenzsatzes zu Ende geführt.

§ 2.

Krummlinige Begrenzung.

Um den Existenzbeweis eines freien Strahles mit einer vorgeschriebenen symmetrischen krummlinigen Düse zu erbringen, approximieren wir ihr Profil durch einbeschriebene polygonale symmetrische Düsen $D_1, D_2, \ldots, D_N$, die

[13]) Das letztere kann nicht eintreten in dem von uns betrachteten Falle, wo die Totalkrümmung $\leqq \frac{\pi}{2}$ ist.

alle dieselben Austrittsstellen wie der gegebene Kanal besitzen (vgl. Fig. 1). Die Düse D_{N+1} soll dabei die Düse D_N umschließen. Das ist z. B. dann der Fall, wenn alle Ecken von D_N unter denjenigen von D_{N+1} vorkommen. Die Anzahl n_N der Seiten von D_N soll mit N ins Unendliche wachsen.

Wir setzen voraus, daß wir eine Cisottische Strömung für jede der polygonalen Düsen D_N angeben können. Das wird sicher der Fall sein, wenn die Totalkrümmung der vorgegebenen Düse $\leqq \frac{\pi}{2}$ ist. Die zugehörigen Strömungen seien durch die Formeln

$$z = F_N(\zeta) = \mu_N \int_1^{\zeta} \frac{1}{w_N(\zeta)} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (N = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

gegeben. Die Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N, \ldots$ liegt dann zwischen zwei positiven Schranken. Das folgt z. B. aus der Tatsache, daß die Öffnungen der Düsen eine konstante Größe haben. Wir denken uns aus der Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ eine konvergente Folge mit dem Limes μ abgesondert und behalten im übrigen alle Bezeichnungen bei. Wir betrachten jetzt die Folge der Geschwindigkeitsfunktionen

$$w_1(\zeta), w_2(\zeta), \ldots, w_N(\zeta), \ldots \tag{10}$$

in dem durch die obere Hälfte der Kreisperipherie $|\zeta| = 1$ und den beiden Strecken $\left(-1, -\frac{i}{2}\right)$, $\left(-\frac{i}{2}, +1\right)$ begrenzten Gebiete G in der ζ-Ebene. Die Folge (10) ist in G gleichmäßig beschränkt. Es ist nämlich der $\lg |w_N|$ durch die Formel

$$\lg |w_N| = \lg \prod_1^{2n_N} \left| \frac{\zeta - \zeta_k}{1 - \zeta \bar{\zeta}_k} \right|^{\beta_k} = \lg \prod_1^{2n_N} \left| \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta - \bar{\zeta}_k} \right|^{\beta_k} = \sum_1^{2n_N} \beta_k \lg \left| \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta - \bar{\zeta}_k} \right|$$

gegeben, wobei selbstverständlich die Werte der ζ_k und der β_k von dem Index N abhängig sind. Jedoch ist die $\sum_1^{2n_N} \beta_k$ für alle N kleiner oder gleich $2T$, wo T die Totalkrümmung der vorgegebenen krummlinigen Düse bedeutet.

Da $\left|\frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta - \bar{\zeta}_k}\right|$ im Gebiete G kleiner ist als eine absolute, von der Lage von ζ und von ζ_k ($= e^{i\sigma_k}$) unabhängige Konstante M ist, erhalten wir für den $\lg |w_N|$ die Abschätzung

$$\lg |w_N(\zeta)| < 2T \lg M,$$

woraus die Beschränkheit der Folge der Beträge der $w_N(\zeta)$ hervorgeht Wir können also nach Montel aus der Folge (10) eine unendliche Teilfolge

auswählen, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $w(\zeta)$ konvergiert. $w(\zeta)$ ist, wie alle $w_N(\zeta)$, auf der reellen Strecke $(-1, +1)$ dem Betrage nach gleich 1.

Zugleich mit der Folge der $w_N(\zeta)$ und der μ_N konvergiert die Folge der durch die Formel (9) erklärten Funktionen $F_N(\zeta)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich unseres Halbkreises gegen die Grenzfunktion

$$z = F(\zeta) = \mu \int_1^{\zeta} \frac{1}{w(\zeta)} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \frac{d\zeta}{\zeta} + z_0. \tag{11}$$

$F(\zeta)$ vermittelt als Limes einer Folge von schlichten Funktionen $F_N(\zeta)$ eine schlichte Abbildung der oberen Hälfte des Kreises $|\zeta| < 1$ auf ein Gebiet in der z-Ebene. Dieses Gebiet ist nach bekannten Sätzen von Carathéodory und Bieberbach[14]) identisch mit dem Kern unserer Strömungsgebiete mit den polygonalen Düsen D_N. Die Tatsache, daß die Strömungsgebiete nicht beschränkt sind, bildet bekanntlich kein Hindernis für die Anwendung dieser Sätze. Übrigens könnte man zu beschränkten Gebieten übergehen, indem man die approximierenden Stömungen, die alle innerhalb eines hinreichend breiten Parallelstreifens in der z-Ebene liegen, einer Transformation durch reziproke Radien unterwirft.

Die durch die Formel (11) gelieferte Strömung besitzt also die vorgegebene krummlinige Düse zur festen Grenze. Das Gebiet der Strömung enthält den Streifen $-\frac{\mu_0 \pi}{2} \leqq z \leqq +\frac{\mu_0 \pi}{2}$, wo μ_0 die untere Grenze aus der Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ist. Die Geschwindigkeitsfunktion hat auf den freien Grenzen (dem Bilde der Strecke $-1 \leqq \zeta \leqq 1$) den Betrag 1. Damit ist die Existenz eines Flüssigkeitsstrahles mit einer vorgegebenen krummlinigen Düse von einer Totalkrümmung $\leqq \frac{\pi}{2}$ bewiesen.

[14]) Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. 2, S. 13.

(Eingegangen am 21. April 1929.)

Über die kleinen numerischen Divisoren in der Theorie der allgemeinen Störungen.

Von

Aurel Wintner in Leipzig, z. Z.*) in Rom.

Anfang der achtziger Jahre sind die Astronomen Gyldén und Bruns zu Konvergenzfragen geführt worden[1]), die bei der Integration gewisser fastperiodischer Funktionen auftreten; es handelt sich um die Folge von Quadraturen, deren Gesamtheit den Prozeß der schrittweisen Näherungen z. B. in der Lagrange-Leverrierschen Störungstheorie der großen Planeten ausmacht[2]). Die Schlußweisen von Gyldén und z. T. auch von Bruns sind — wie es bei dem damaligen Stand der Dinge nicht anders sein konnte — mathematisch gar nicht befriedigend, und seit der Entstehung der modernen reellen Funktionenlehre haben manche Bemühungen der Sicherstellung der von astronomischer Seite her gewonnenen Ergebnisse gegolten. Die in dieser Beziehung am weitesten gehende Untersuchung rührt von Herrn Petersson[3]) her.

Freilich hat man dabei die eigentlich astronomische Seite der Fragestellung mathematisch nicht weiter verfolgt. Insbesondere hat man sich ohne nähere Begründung auf die Betrachtung der von der Zeit freien Majorantenreihe beschränkt[4]). Heute steht hier ganz allgemein der Bohrsche

*) International Education Board Fellow.

[1]) Vgl. die Darstellung von C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels 2, S. 304 bis 330, Leipzig 1907. Siehe auch É. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898, S. 62ff.

[2]) Vgl. eine interessante Diskussion zwischen Poincaré und Hill: H. Poincaré, Méth. nouv. de la méc. cél. 2, S. 94—111; G. W. Hill, Coll. Works 4, S. 94—98; H. Poincaré, C. R. 122 (1896), S. 497—499; G. W. Hill, Coll. Works 4, S. 108ff.; H. Poincaré, C. R. 122 (1896), S. 557—559.

[3]) H. Petersson, Abh. Hamb. Math. Sem. 3 (1924), S. 324—330.

[4]) Vgl. jedoch H. Poincaré, Bull. Astr. 1 (1884), S. 324ff. Doch sind die Ausführungen von Poincaré nicht streng. Die Sache kann eben nur auf Grund der Theorie der fastperiodischen Funktionen in Ordnung gebracht werden, was oben auf eine indirekte Weise geschehen ist.

Satz zur Verfügung, wonach die Amplitudensumme absolut konvergiert, wenn die Exponenten linear unabhängig sind. — Aber auch was die Majorantenreihe anlangt, kann man ziemlich abschließende rein diophantische (von den Koeffizienten unabhängige) Resultate erhalten, wenn man den Charakter der astronomischen Fragestellung des näheren ausnützt.

So scheint es nicht überflüssig zu sein, auf diese oft behandelten Fragen nochmals zurückzukommen. Nebenbei ergeben sich lehrreiche explizite Beispiele fastperiodischer bzw. nichtfastperiodischer Reihen, die zeigen, an wie empfindlich labile Merkmale der fastperiodische Charakter gebunden ist.

Die eingangs erwähnte Quadraturaufgabe ist im wesentlichen die folgende:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{m=1}^{\infty} \mu^{n+m} A_{nm}(\mu) \cos(n - m\varrho)t; \qquad (x)_{t=0} = 0, \tag{1}$$

wobei ϱ eine (reelle) Irrationalzahl und A_{nm} eine Funktion des reellen Parameters μ bedeutet, für welche etwa

$$0 < \text{konst.} < \sqrt[n+m]{|A_{nm}(\mu)|} < \text{Konst.} \qquad (n, m = 1, 2, \ldots;\ -1 < \mu < 1)$$

gilt, so daß für unsere Zwecke die Annahme

$$A_{nm}(\mu) \equiv 1 \qquad (n, m = 1, 2, \ldots)$$

keine Einschränkung der Fragestellung bedeutet. Mit der Abkürzung

$$\varphi \equiv \varphi(t; \mu; \varrho) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{m=1}^{\infty} \mu^{n+m} \cos(n - m\varrho)t \tag{2}$$

geht so (1) über in

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t; \mu; \varrho); \qquad (x)_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Diese Aufgabe entspricht dem Dreikörperproblem. Auf den Fall des Mehrkörperproblems, wo an Stelle der Doppelreihe (2) eine mehrfache tritt, könnten die nachfolgenden Überlegungen ohne besondere Mühe übertragen werden.

Der Parameter μ sei nun nicht notwendig reell, wohl aber die Zeit t. Die reelle Irrationalzahl ϱ soll fest gewählt sein. Ist $|\mu| < 1$, so ist die Reihe (2) auf der unendlichen t-Achse gleichmäßig konvergent, da sie die konvergente Majorante $\varphi(0; |\mu|; .)$ zuläßt; erst recht ist dann (2) fastperiodisch. Mit Rücksicht auf die Gleichmäßigkeit der Konvergenz ist in (3) rechterhand gliedweise Integration gestattet:

$$x = \psi(t; \mu; \varrho), \tag{4}$$

wobei demnach die Doppelreihe

$$\psi \equiv \psi(t; \mu; \varrho) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu^{n+m}}{n - \varrho m} \sin(n - \varrho m)t \tag{5}$$

bei jedem ϱ und jedem μ ($|\mu|<1$) *auf jedem endlichen, aber festen Intervall*

$$-T<t<T$$

gleichmäßig konvergiert. Unsere Aufgabe wird sich im wesentlichen darauf beziehen, zu untersuchen, wann (5) auch für *alle* t, d. h. *auf der unendlichen* t*-Achse*

$$-\infty<t<+\infty$$

gleichmäßig konvergiert. Die ursprüngliche Fragestellung ist aber nicht diese, sondern die folgende: Bei welchen Werten von μ und ϱ bleibt der Betrag der Koordinate (4), welche durch die für

$$|\mu|<1, \qquad -\infty<t<+\infty$$

bei jedem ϱ durchweg konvergente Reihe (5) eindeutig erklärt ist, unterhalb einer von t unabhängigen Schranke?[5])

Zunächst ist dies dann und nur dann der Fall, wenn die Funktion (3) fastperiodisch ist. Denn für die Fastperiodizität des unbestimmten Integrals einer fastperiodischen Funktion ist dessen Beschränktheit nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend[6]), und die Ableitung (2) ist jedenfalls fastperiodisch.

Um weiter zu gelangen, müssen wir unsere Frage auf die Behandlung der Majorantenreihe

$$\Psi(\mu;\varrho)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu|^{n+m}}{|n-\varrho m|} \tag{6}$$

von (5) reduzieren.

Zu diesem Ende sei zunächst die Zahl $\mu_0\neq 0$ (bei festem ϱ) derart, daß die Reihe $\Psi(\mu_0;\varrho)$ konvergiert. Dann ist (6) auch für $|\mu|<|\mu_0|$ konvergent, also (5) in diesem Kreise für alle t gleichmäßig konvergent, mithin beschränkt, d. h. fastperiodisch. — Ist umgekehrt (wieder bei festem ϱ) $\mu_0\neq 0$ derart, daß die etwa einfach geordnete Reihe $\psi(t;\mu_0;\varrho)$ bei einer bestimmten Anordnung ihrer Glieder für alle t gleichmäßig konvergiert, so ist die Funktion beschränkt. Ist sie aber beschränkt, d. h. fastperiodisch, so muß die Reihe

$$M(\mu_0;\varrho)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu_0|^{\varrho(n+m)}}{(n-\varrho m)^2}, \tag{7}$$

[5]) Ist ϱ rational, so erklärt (3) für $|\mu|<1$ und nur für $|\mu|<1$ eine stetige und bis auf ein in t lineares Zusatzglied *periodische* Funktion. Dieser triviale Fall ist oben von vornherein ausgeschlossen worden.

[6]) H. Bohr, Acta Math. **45** (1925), S. 123ff.

d. i. die Quadratsumme der Beträge der Amplituden, gewiß konvergent sein. Daraus folgt aber nach (6), wenn $|\mu| < |\mu_0|$, d. h.

$$\mu = \vartheta \mu_0, \qquad |\vartheta| < 1$$

vorausgesetzt wird, nach der Schwarzschen Ungleichheit

$$[\Psi(\mu; \varrho)]^2 \leqq M(\mu_0; \varrho) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\vartheta|^{2(n+m)}; \qquad |\vartheta| < 1,$$

daß die Majorantenreihe (6) für $|\mu| < \mu_0$ gewiß konvergiert und daher (5) bei jedem der Bedingung $|\mu| < \mu_0$ genügenden Werte des Parameters fastperiodisch und für alle t gleichmäßig konvergent ist.

Wir sehen also, daß *die obere Grenze* Θ_ϱ *derjenigen nichtnegativen Zahlen* $|\mu|$, *für welche die Majorantenreihe* $\Psi(\mu; \varrho)$ *konvergiert*, alles zu beherrschen vermag: Ist die Irrationalzahl ϱ derart, daß $\Theta_\varrho \neq 0$, d. h. > 0 wird, so sind, sofern man von dem Rande $|\mu| = \Theta_\varrho$ absieht, zwei Fälle möglich: entweder gilt $|\mu| < \Theta_\varrho$, und dann ist die Reihe (5) für alle t gleichmäßig konvergent, also beschränkt, d. h. fastperiodisch; oder aber $|\mu|$ ist $> \Theta_\varrho$, und dann ist (5) weder beschränkt noch gleichmäßig konvergent für

$$-\infty < t < +\infty$$

(wohl aber für $-T < t < T$). Ist endlich $\Theta_\varrho = 0$, so ist (5) bei jedem $\mu \neq 0$ weder beschränkt noch für alle t (wohl aber auf jedem endlichen Intervall) gleichmäßig konvergent.

Hierbei ist stillschweigend offenbar vorausgesetzt worden, daß $|\mu| < 1$ gilt. Andere Werte von μ kommen aber gar nicht in Betracht. Es gilt nämlich bei jedem ϱ

$$\Theta_\varrho \leqq 1,$$

d. h. (6) ist für $|\mu| > 1$ durchweg divergent. Denn bereits die innere Summe in der positiven Doppelreihe (6) konvergiert nur für $|\mu| < 1$. Ebenso ist für $|\mu| \geqq 1$ auch (7) divergent, also (5) gewiß keine fastperiodische Reihe.

Unsere ursprüngliche, sich auf die trigonometrische Reihe (5) beziehende Fragestellung (S. 436) ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt, den „Konvergenzradius" Θ_ϱ der von der Zeit unabhängigen Majorantenreihe (6) als Funktion der Irrationalzahl ϱ zu studieren. Es kommt dabei offenbar auf den diophantischen Charakter von ϱ an: ist die Zahl ϱ in dem Sinne „irregulär", daß sie — nach der Art der von Liouville konstruierten transzendenten Zahlen — eine *starke* Approximation mittels Rationalzahlen gestattet, so werden in (6) die Nenner *rasch* klein werden, d. h. der Konvergenzradius Θ_ϱ wird klein ausfallen, vielleicht sogar verschwinden; umgekehrt, etwa bei algebraischen Irrationalitäten sind mit

Rücksicht auf die Liouvillesche Ungleichheit möglichst gute Konvergenzverhältnisse zu erwarten. Wir wollen daher die folgende Sprechweise einführen: Die Irrationalzahl ϱ heißt

$$\begin{aligned} &\text{regulär,} \quad \text{wenn} \quad \Theta_\varrho \geqq 1, \text{ also genau } = 1, \\ &\text{irregulär,} \quad \text{wenn} \quad 0 \leqq \Theta_\varrho < 1, \\ &\text{singulär,} \quad \text{wenn} \quad \Theta_\varrho = 0. \end{aligned}$$

ist. (Die singulären Zahlen sind also auch irregulär.)

Es läßt sich nun folgendes behaupten: Jedes Intervall der ϱ-Achse enthält singuläre Zahlen sogar in der Mächtigkeit des Kontinuums, doch bilden die singulären und allgemeiner die irregulären Zahlen nur eine Menge vom Maße Null. — Aus dem Vorangehenden ist unmittelbar ersichtlich, was dieses empfindliche Verhalten der Funktion $\Theta = \Theta_\varrho$ für die trigonometrische Reihe (5) bedeutet: Wie klein auch die positive Zahl $\mu < 1$ fest gewählt sein mag, wird es überall dicht und in der Mächtigkeit des Kontinuums Werte ϱ geben derart, daß die Koordinate (4) nicht beschränkt, d. h. nicht fastperiodisch ist (wenn auch dem Vorkommen derartiger Werte ϱ im Sinne der Maßtheorie nur die Wahrscheinlichkeit Null zukommt).

Was zunächst den ersten, sich auf die Verteilung und Mächtigkeit der singulären Zahlen beziehenden Teil der Behauptung anlangt, so folgt dieser mittels wiederholter Heranziehung des Cantorschen Diagonalverfahrens nach einer wohlbekannten Schlußweise[7]) über Borelsche Reihen des Typus (10), welche ergibt, daß diese Menge von der zweiten Baireschen Kategorie ist (d. h. nicht als die Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Punktmengen dargestellt werden kann), also gewiß auf jedem Intervalle eine Teilmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums enthalten muß. — Der zweite Teil der Behauptung, wonach fast überall $\Theta_\varrho = 1$ gilt, folgt z. B. aus dem folgenden Borelschen Satz: die Reihe

$$F(\varrho) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{\varrho - \omega_j}, \tag{8}$$

wobei $\{a_j\}$ eine positive, der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{a_j} < +\infty \tag{9}$$

[7]) Vgl. z. B. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1921, S. 313ff. Dieselbe Schlußweise ist von den Herren Steinhaus und Neder bei Betrachtung von Fourierreihen pathogener stetiger Funktionen wiedergefunden worden; siehe L. Neder, Diss., Göttingen 1919 [1914]. Vgl. übrigens H. Hankel, Ostwalds Klassiker **153** (1905 [1870]), S. 95ff., wobei jedoch die Betrachtung noch nicht voll durchgeführt wird.

genügende und $\{\omega_j\}$ irgendeine Zahlenfolge bedeutet, ist fast überall konvergent[8]). Denn man kann (6) in der Gestalt

$$\Psi(\mu_0;\varrho)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mu_0|^{n+m}}{m\left|\varrho-\frac{n}{m}\right|} \tag{10}$$

schreiben und die beiden Reihen (8), (10) nach fester Wahl von μ_0 miteinander, also $\{\omega_j\}$ mit der irgendwie einfach geordneten Doppelfolge $\left\{\left\{\frac{n}{m}\right\}\right\}$ identifizieren, so daß (9) in

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\sqrt{\mu_0}|^{n+m}}{\sqrt{m}}<+\infty \tag{9}'$$

übergeht. Da (9)′ für $|\mu_0|<1$, also für $\mu_0=1-\frac{1}{k}$, $k>1$ erfüllt ist, so bilden die Zahlen ϱ, für welche $\Theta_\varrho \geqq 1-\frac{1}{k}$ nicht gilt, eine Nullmenge, und da die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen $(k=2,3,\ldots)$ eine Nullmenge ist, so gilt fast überall auch $\Theta_\varrho \geqq 1$, w. z. b. w.

Solche reguläre Zahlen ϱ kann man auch effektiv angeben. Denn z. B. jede algebraische Irrationalität ist regulär. Ist nämlich α der Grad von ϱ, so gibt es nach Liouville eine nur von ϱ abhängige positive Zahl β mit

$$\left|\varrho-\frac{n}{m}\right|>\frac{\beta}{|m|^{\alpha}} \qquad (n,m=\pm 1,\pm 2,\ldots), \tag{11}$$

woraus ersichtlich ist, daß (10) für $|\mu_0|<1$ konvergieren muß. Ebenso folgt von neuem, daß fast überall $\Theta_\varrho=1$ gilt. Denn die „nicht Liouvilleschen Zahlen", für welche die Bedingung (11) bei keinem $\alpha>0$, $\beta>0$ erfüllt ist[9]), bilden bekanntlich eine Nullmenge.

Die Gleichung (3) mit (2) ist diejenige, die von Hill a. a. O. [2]) als typisches Beispiel betrachtet wurde. In der Tat ändert sich, wie man sich leicht überzeugt, gar nichts, wenn man z. B. zu

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}}' \mu^{|n-m|}\cos(n-m\varrho)t$$

übergeht, wobei der Akzent auf die Auslassung der Summationswerte $m=n$ hinweist, oder wenn man die Gleichung betrachtet, welche bei der Behand-

---

[8]) Vgl. H. Hahn, a. a. O. [7]).

[9]) Wenn (11) überhaupt erfüllt ist, so muß $\alpha \geqq 2$ sein, da nach einem bekannten Kettenbruchsatz jede irrationale Zahl durch eine Folge $\left\{\frac{n_\nu}{m_\nu}\right\}$ von rationalen derart beliebig genau approximiert werden kann, daß der Fehler $=O\left(\frac{1}{m_\nu^2}\right)$ wird. (Insbesondere können also die Nenner in (5) dem Betrage nach stets beliebig klein werden.)

lung der mittleren Länge auftritt. In diesem Falle geht linkerhand nicht die erste, sondern die zweite Ableitung ein, so daß z. B. (3) in

$$(3)' \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^{n+m} \cos(n - \varrho\, m)\, t$$

übergeht. Die allgemeine Lösung von (3)′ ist

$$(5)' \qquad x = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu^{n+m}}{(n - \varrho\, \mu)^2} \cos(n - \varrho\, m)\, t + C_1 t + C_2,$$

und die Differenz $x - (C_1 t + C_2)$ erledigt sich nach Zurückführung auf die Majorantenreihe

$$(6)' \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mu|^{n+m}}{(n - \varrho\, m)^2}$$

offenbar genau so wie unsere erste Aufgabe.

(Eingegangen am 3. November 1929.)

NEUERSCHEINUNGEN

Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie

Von Dr. **Edmund Landau**

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen

Zweite Auflage. Mit 10 Textfiguren. 122 Seiten. RM 9.60

Das Buch behandelt in erster Linie diejenigen modernen Fragestellungen der Funktionentheorie, die mit dem Konvergenzverhalten der Potenzreihen auf dem Rand ihres Konvergenzkreises und mit ihrer analytischen Fortsetzbarkeit zusammenhängen. Von den Änderungen der zweiten Auflage gegenüber der ersten sind besonders zu erwähnen: Die Fabryschen Sätze, ferner die Herleitung der Sätze des Picardschen Ideenkreises auf dem neuesten, völlig elementaren Wege und zuletzt die Weiterführung der Theorie der schlichten Funktionen bis zur genauen Bieberbachschen Schrankenbestimmung. Als bekannt werden nur die Anfangsgründe der Funktionentheorie vorausgesetzt.

Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie u. elliptische Funktionen

Von **Adolf Hurwitz** †

weil. ord. Professor der Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich

Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über

Geometrische Funktionentheorie

Von **R. Courant**

ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen

Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 152 Abbildungen. XII, 534 Seiten. 1929. RM 33.—; gebunden RM 34.80

Band 3 der „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften"

Inhaltsübersicht: **Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen:** Die komplexen Zahlen. Die Potenzreihen. Der Begriff der analytischen Funktion. Untersuchung einiger spezieller analytischer Funktionen. Die Integration analytischer Funktionen. Die meromorphen Funktionen. Die Umkehrung der analytischen Funktionen. — **Elliptische Funktionen:** Die doppeltperiodischen meromorphen Funktionen. Die Theta-Funktionen. Die elliptischen Funktionen Jacobis. Die elliptischen Modulfunktionen. Elliptische Gebilde. Elliptische Integrale. Die Transformation der elliptischen Funktionen. — **Geometrische Funktionentheorie:** Vorbereitende Betrachtungen. Die Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen. Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel. Spezielle Funktionen und ihre Singularitäten. Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen. Die konforme Abbildung einfach zusammenhängender schlichter Gebiete. Spezielle Abbildungsfunktionen. Die Verallgemeinerung des Riemannschen Abbildungssatzes. Das Dirichletsche Prinzip. Weitere Existenztheoreme der Funktionentheorie.

Foundations of Potential Theory

By **Oliver Dimon Kellogg**

Professor of Mathematics in Harvard University Cambridge, Massachusetts, U. S. A.

Mit 30 Figuren. IX, 384 Seiten. 1929. RM 19.60; gebunden RM 21.40

Band 31 der „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften"

Inhaltsübersicht: The Force of Gravity. Fields of Force. The Potential. The Divergence Theorem. Properties of Newtonian Potentials at Points of Free Space. Properties of Newtonian Potentials at Points Occupied by Masses. Potentials as Solutions of Laplace's Equation; Electrostatics. Harmonic Functions. Electric Images; Green's Function. Sequences of Harmonic Functions. Fundamental Existence Theorems. The Logarithmic Potential.

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik veröffentlichen wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Werkmeiser, P., Vermessungskunde. I. Stückmessung und Nivellieren. 156 S. Mit 140 Abbildungen. Vierte Auflage. Sammlung Göschen.

Gans, R., Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf Physik und Technik. VIII, 112 S. Kl.-8°, Sechste, verbesserte Auflage. Mit 40 Figuren. Teubner, Leipzig, Berlin.

Nielsen, Niels, Géomètres français sous la révolution. VIII, 250 S. Gr.-8°. Levin & Munksgaard éditeurs, Copenhague-Danmark. 1929.

Veröffentlichungen des Vereines Ernst Mach, Wissenschaftliche Weltauffassung. Der Wiener Kreis. 64 S. 8°. Artur Wolf Verlag, Wien. 1929.

Kaiser, Ludwig, Über die Verhältniszahl des Goldenen Schnitts. Die Reihe der mit ihr zusammenhängenden ganzen Zahlen und eine aus dieser abgeleitete Reihe. VI, 123 S. 8°. Teubner, Leipzig, Berlin. 1929.

Villat, Henri, Leçons sur l'Hydrodynamique. III, 296 S. Gr.-8°. Gauthier-Villars et Cie, éditeurs, Paris 1929.

Levi, Friedrich, Geometrische Konfigurationen. Mit einer Einführung in die kombinatorische Flächentopologie. VIII, 310 S. Gr.-8°. Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1. 1929.

Juška, Antanas, Die scheinbare Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe. Veröffentlichungen der Universitäts-Sternwarte in Göttingen. Herausgegeben von dem Direktor H. Kienle. Heft 9. Göttingen. 1929.

Heckmannn, O. u. H. Siedentopf, Zur Bestimmung der Helligkeitsverteilung auf der Sonnenscheibe. Ebenda, Heft 8. Göttingen. 1929.

Cherubim, Reinhard, Die Methode der effektiven Wellenlängen und ihre Anwendung auf den offenen Sternhaufen M 34. Ebenda, Heft 9. Göttingen. 1929.

Sierpiński, Wacław. Wstęp do teorji mnogości i topologji. 8°. 119 Seiten. Monografje i Podręczniki, Tom X. Lwów 1930. Nakład i własność K. S. Jakubowskiego.

Zacharias, Max, Elementargeometrie der Ebene und des Raumes. Mit 196 Figuren. Gr.-8°, 252 S. Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Band 16. Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10 und Leipzig 1930.

Strömgren, Bengt. Formeln und Tafeln zur Bestimmung parabolischer Bahnen. Mit zwei Numogrammen. 8°, 146 S. Publikationer og mindre Meddelelser fra Københavns Observatorium Nr. 66. København, Bianco Lunos Bogtrykkeri. 1929.

Volk'as, Otto. Paprastųjų ir dalinių Differencialinių Lygčių teorijos paskaitos. VI und 507 S. 8°. Lietuvos Universiteto Matematikos-Gamtos-Fakultetas. Kaunas. 1929.

Hierzu zwei Beilagen vom Verlag Julius Springer in Berlin.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.